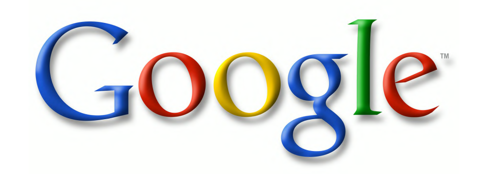


COURS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE. T. I. Cinématique

par S. PETROVITCH,

PROFESSEUR À L'ACADÉMIE D'ARTILLERIE MICHEL.

КУРСЪ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.

ЧАСТЬ I.

КИНЕМАТИКА.

С. Г. ПЕТРОВИЧЪ.

Ординарный профессоръ Михайловской Артиллерійской Академіи.

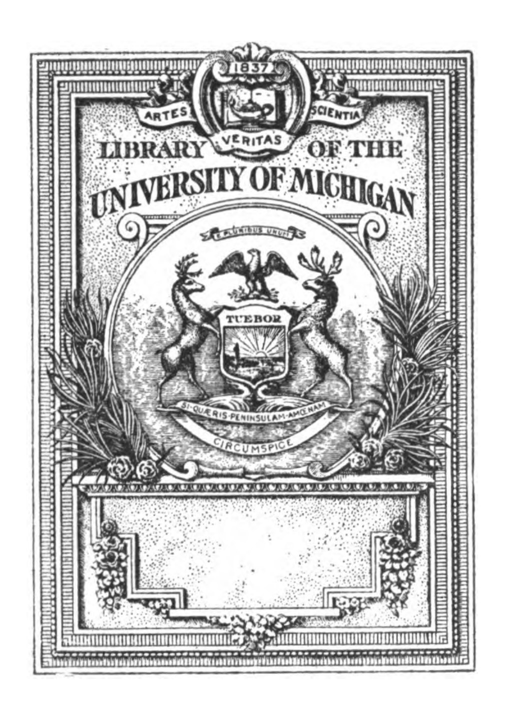


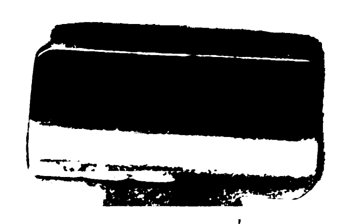
С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типографія Министерства Путей Сообщенія

(Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°), Фонтанка, 117.

1912.


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI·QUÆRIS·PENINSULAM·AMŒNAM
CIRCUMSPICE



COURS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE. T. I. Cinématique

par S. PETROVITCH,

PROFESSEUR À L'ACADÉMIE D'ARTILLERIE MICHEL.

КУРСЪ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.

ЧАСТЬ I.

КИНЕМАТИКА.

С. Г. ПЕТРОВИЧЪ.

Ординарный профессоръ Михайловской Артиллерійской Академіи.



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Министерства Путей Сообщенія
(Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К⁰), Фонтанка, 117.
1912.

Prof. Alex. Ziwet
gt.
2-10-1923

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Введеніе. О векторахъ и ихъ моментахъ.

Кинематика точки.

Глава I. Заданіе движенія.

Глава II. О скорости.

Глава III. **Объ ускореніи.**

Кинематика твердаго тѣла.

Глава IV. **Абсолютное, относительное и переносное движеніе точки. Заданіе движенія твердаго тѣла.**

При составленіи этого курса, который, съ нѣкоторыми дополненіями, представляетъ изъ себя лекціи, читаемыя мною гг. офицерамъ, слушающимъ курсъ въ Михайловской Артиллерійской Академіи, я пользовался слѣдующими сочиненіями:

Appell, P. Traité de mécanique rationnelle. 2-me éd. T. I—III. Paris, 1902—1909.

Бобылевъ, Д. К. Курсъ аналитической механики. Т. I—IV. С.-Петербургъ, 1885—1889 гг.

Despeyroux, Cours de mécanique. T. I—II. Paris, 1884—1886.

Fuhrmann, A. Aufgaben aus der analytischen Mechanik. T. I—II. Leipzig, 1904.

Hertz, H. Die Prinzipien der Mechanik im neuem Zusammenhange dargestellt. Gesammelte Werke. B. III. Leipzig, 1894.

Jouguet, E. Lectures de mécanique. T. I—II. Paris, 1908—1909.

Kirchhoff, G. Vorlesung über Mechanik. Leipzig, 1897.

Кирпичевъ, В. Л. Бесѣды по механикѣ. С.-Петербургъ, 1907 г.

Klein, F. und Sommerfeld, A. Über die Theorie des Kreisels. H. I—IV. Leipzig, 1897—1910.

Koenigs, G. Leçons de cinématique. Paris, 1897.

Kraft, F. Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik. B. I—II. Stuttgart, 1884--1885.

Lagrange. Mécanique analytique 4-me éd. T. I—II. Paris, 1888—1889.

Mach, E. La mécanique. Exposé historique et critique de son développement. Trad. fran. par E. Bertrand. Paris, 1904.

Ritter, A. Lehrbuch der analytischen Mechanik. Leipzig. 1899.

Routh, E. A treatise on dynamics of a particle. Cambridge. 1898.

Routh, E. Dynamics of a system of rigid bodies. T. I—II. London, 1892—1897.

Saint-Germain, A. Recueil d'exercices sur la mécanique rationnelle. 2-me éd. Paris, 1889.

Сомовъ, П. О. Основаніе теоретической механики. С.-Петербургъ, 1904 г.

Сусловъ, Г. К. Основы аналитической механики. Т. I—II. Кіевъ, 1900—1902 гг.

Webster, A. The dynamics of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies. Leipzig, 1904,—
а также литографированными лекціями профессовъ Sarrau и Léauté Парижской École Polytechnique и моихъ предшественниковъ по каѳедрѣ теоретической механики въ Михайловской Артиллерійской Академіи—профессоровъ Н. С. Будаева и П. А. Шиффа.

С. Петровичъ.



Механика есть наука о движенiи. Начиная съ простѣйшаго, механика изучаетъ сначала движенiе точки, затѣмъ переходитъ къ разсмотрѣнiю движенiя совокупности точекъ, въ конечномъ или безконечно-большомъ числѣ, составляющихъ, такъ называемыя, **системы.**

Занимаясь разсмотрѣнiемъ движенiя системъ, механика въ частности разсматриваетъ движенiе тѣлъ, т. е. совокупностей точекъ, заполняющихъ нѣкоторые объемы и лежащихъ на ограничивающихъ ихъ поверхностяхъ. Въ этомъ случаѣ механика сначала предполагаетъ разсматриваемыя ею тѣла **твердыми** или **неизмѣняемыми**, разумѣя подъ твердымъ тѣломъ такое, разстоянiе между каждой парой точекъ котораго все время остается неизмѣннымъ или, слѣдовательно, такое, которое не можетъ деформироваться, независимо отъ тѣхъ причинъ, которыя могли бы вызывать его деформацiи. Затѣмъ механика переходитъ къ разсмотрѣнiю движенiя, такъ называемыхъ, **измѣняемыхъ тѣлъ**, ограничиваясь, впрочемъ, въ этомъ случаѣ тѣми или другими предположенiями относительно свойствъ этихъ тѣлъ, опредѣляющихъ ихъ возможныя деформацiи.

Такимъ образомъ, механика устанавливаетъ методы, дающiе возможность съ большимъ или меньшимъ приближенiемъ изучать движенiя дѣйствительныхъ тѣлъ природы.

Механика сначала разсматриваетъ движенiя независимо отъ причинъ, подъ влiянiемъ которыхъ эти движенiя происходятъ; отдѣлъ механики, занимающiйся такимъ разсмотрѣнiемъ движенiй, носитъ названiе **кинематики.** Затѣмъ механика переходитъ къ разсмотрѣнiю движенiй въ зависимости

отъ причинъ, производящихъ эти движенія, или отъ, такъ называемыхъ, **силъ**; этотъ отдѣлъ механики называется **кинетикой** и дѣлится въ свою очередь на два отдѣла: **динамику**, которая занимается изученіемъ вопроса о движеніи въ тѣсномъ смыслѣ слова, и **статику**, которая разсматриваетъ условія покоя или равновѣсія точекъ и тѣлъ подъ дѣйствіемъ силъ.

Мы начнемъ предлагаемый курсъ съ кинематики, но предварительно остановимся на разсмотрѣніи нѣкоторыхъ общихъ свойствъ векторовъ и ихъ моментовъ, которыя будутъ намъ служить основаніями послѣдующаго изложенія.

ВВЕДЕНІЕ.

О векторахъ и ихъ моментахъ.

1. **Векторомъ** будемъ называть отрѣзокъ, заданный по величинѣ и по направленію.

Векторъ въ пространствѣ опредѣляется, если задать:

1) положеніе, прямой l (черт. 1), на которой онъ расположенъ;

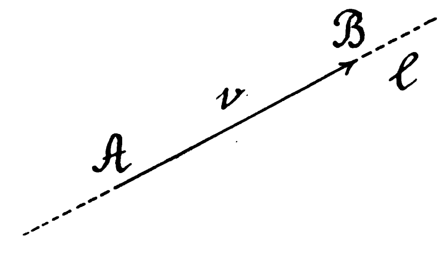
2) точку A этой прямой, изъ которой онъ проведенъ или, какъ говорятъ, его точку приложенія;

3) его направленіе на этой прямой,

и 4) его величину V.

Мы будемъ обозначать векторъ или двумя буквами, напримѣръ A и B, поставленными въ его началѣ и въ его концѣ, или одной V, выражающей его величину.

По отношенію къ координатной системѣ прямоугольныхъ осей въ пространствѣ, векторъ можетъ быть заданъ посредствомъ заданія координатъ его начала и конца, ибо эти величины, какъ не трудно убѣдиться, вполнѣ опредѣляютъ всѣ выше перечисленные элементы, опредѣляющіе векторъ.



Черт. 1.

Обозначая координаты точки приложенія вектора черезъ

$$x_1, y_1, z_1$$

(черт. 2), а координаты его конца через

$$x_2, y_2, z_2$$

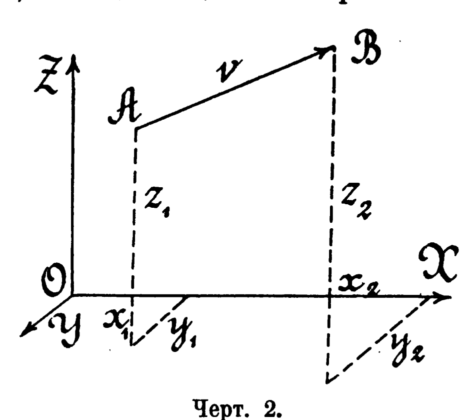
и называя проекціи этого вектора на оси координатъ через

$$X, Y, Z,$$

мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} X &= x_2 - x_1 \\ Y &= y_2 - y_1 \\ Z &= z_2 - z_1 \end{aligned}\right\},$$

откуда видимъ, что, для заданія вектора относительно прямо-



Черт. 2.

угольной координатной системы, достаточно задать координаты его точки приложенія и его проекціи на оси координатъ.

2. **Моментомъ вектора относительно** какой-нибудь точки будемъ называть векторъ, проведенный изъ этой точки по перпендикуляру къ плоскости, проходящей черезъ нее и данный намъ векторъ, направленный такъ, чтобы, вставъ по его направленію и смотря въ его точку приложенія, мы видѣли его направленнымъ слѣва направо, и численно равный произведенію изъ величины вектора на его разстояніе отъ данной точки.

Моментъ вектора V относительно точки O (черт. 3) будемъ обозначать символомъ

$$M_0\,(V)$$

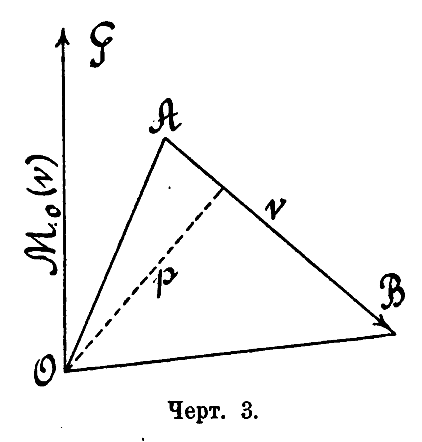
и, въ такомъ случаѣ, называя разстояніе отъ точки O до вектора V черезъ

$$p,$$

будемъ имѣть

$$OG = M_0\,(V) = Vp\,.$$

Изъ приведеннаго опредѣленія момента вектора относительно точки видно, что его численная величина равняется



Черт. 3.

удвоенной площади треугольника, построеннаго на этой точкѣ и на данномъ векторѣ, ибо

$$\Delta\, O\,AB = \frac{Vp}{2}$$

и слѣдовательно

$$M_0\,(V) = 2\Delta O\,AB.$$

Изъ изложеннаго слѣдуетъ,

1) что моментъ вектора относительно точки, лежащей на немъ или на его продолженіи, равняется нулю,

и 2) что моментъ вектора относительно точки не измѣнится, если перемѣстить его точку приложенія по его на-

правленію или, если перемѣстить точку, относительно которой моментъ берется, по прямой, параллельной данному вектору.

Моментомъ вектора относительно какой-нибудь оси будемъ называть проекцію на эту ось момента даннаго вектора, относительно какой-нибудь точки данной оси. Обозначая моментъ вектора V относительно оси l (черт. 4) символомъ

$$Ml\,(V),$$

приведенное опредѣленіе мы можемъ выразить равенствомъ

$$Ml\,(V) = np_l\, M_0\,(V),$$

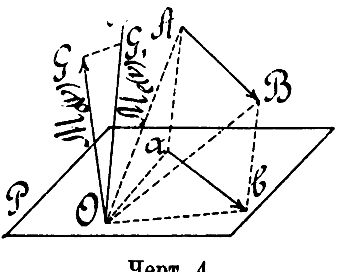
гдѣ O есть произвольная точка разсматриваемой оси.

Чтобы установить приведенное опредѣленіе, необходимо доказать однако слѣдующую теорему:

Теорема. *Моментъ вектора относительно оси не зависитъ отъ выбора точки оси, относительно которой онъ берется.*

Для доказательства этой теоремы, проведемъ черезъ точку O плоскость P, перпендикулярную къ оси l, построимъ проекцію

$$ab$$



Черт. 4.

на эту плоскость разсматриваемаго нами вектора и назовемъ уголъ, образуемый моментомъ нашего вектора относительно точки O съ осью l черезъ

$$\varphi.$$

Мы будемъ имѣть

$$Ml\,(V) = M_0\,(V)\,Cos\,\varphi = 2\Delta\,OAB\,Cos\,\varphi = 2\Delta\,Oab,$$

а такъ какъ изъ приведеннаго нами построенія видно, что площадь треугольника Oab, который является проекціей на плоскость, перпендикулярную къ разсматриваемой нами

оси, площади треугольника OAB, не зависитъ отъ положенія точки O на оси, то предложенная теорема доказана.

Условимся считать моментъ вектора относительно оси положительнымъ, если онъ будетъ совпадать съ ея направленіемъ, и отрицательнымъ въ противномъ случаѣ.

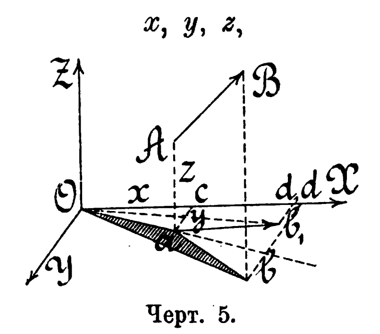
Изъ изложеннаго слѣдуетъ, что моментъ вектора относительно оси обращается въ нуль, если векторъ и ось, относительно которой онъ берется, лежатъ въ одной и той же плоскости, ибо въ такомъ случаѣ векторъ или пересѣкаетъ ось и тогда его моментъ относительно точки встрѣчи съ осью равняется нулю, а, слѣдовательно, онъ равняется нулю и относительно любой точки оси, или же векторъ параллеленъ оси и тогда его проекція на плоскость, перпендикулярную къ оси, равняется нулю, а, слѣдовательно, равняется нулю и площадь треугольника, построеннаго на этой проекціи и соотвѣтствующей точкѣ оси.

3. Аналитическое выраженіе момента вектора относительно оси. Положимъ, что имѣемъ нѣкоторый векторъ

$$AB = V,$$

координаты точки приложенія котораго (черт. 5) суть

$$x,\ y,\ z,$$



Черт. 5.

а проекціи на оси координатъ

$$X,\ Y,\ Z.$$

Проектируя векторъ AB на плоскость XOY и называя его

проекцію на эту плоскость черезъ ab, по предыдущему мы будемъ имѣть

$$M_z(V) = 2\Delta\, O\, ab,$$

а такъ какъ

$$Oab = Obd - Oac - cabd =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(X+x)(Y+y) - xy - (Y+2y)X\right\} = \frac{1}{2}(Yx - Xy),$$

то

$$M_z(V) = Yx - Xy.$$

Замѣтимъ, что полученное выраженіе момента вектора относительно оси OZ выведено въ предположеніи, что векторъ ab направленъ вправо отъ прямой, идущей изъ начала координатъ въ начало этого вектора, т. е. когда разсматриваемый нами моментъ, согласно вышеприведенному условію, положительный. Если бы проекція вектора AB на плоскость XOY имѣла положеніе

$$ab_1,$$

то мы нашли бы, что

$$\Delta\, Oab_1 = \frac{1}{2}(Xy - Yx),$$

но въ этомъ случаѣ моментъ разсматриваемаго нами вектора, согласно вышеприведенному условію, былъ бы отрицательнымъ и значитъ мы имѣли бы, что

$$M_z(V) = -2\Delta\, O\, ab_1,$$

а, слѣдовательно, и въ этомъ случаѣ нашли бы, что

$$M_z(V) = Yx - Xy.$$

Такимъ образомъ, полученное выраженіе момента вектора относительно оси OZ имѣетъ общее значеніе.

Разсуждая совершенно такъ же, мы найдемъ моменты вектора v относительно другихъ координатныхъ осей и, обозначая эти моменты соотвѣтственно черезъ

$$L,\ M,\ N,$$

будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} L &= M_x(V) = Zy - Yz \\ M &= M_y(V) = Xz - Zx \\ N &= M_z(V) = Yx - Xy \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Обозначая затѣмъ моментъ вектора относительно начала координатъ черезъ

$$G_0$$

и принимая во вниманіе, что, согласно опредѣленію момента вектора относительно оси, мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} L &= G_0 \, Cos(G, X) \\ M &= G_0 \, Cos(G, Y) \\ N &= G_0 \, Cos(G, Z) \end{aligned}\right\},$$

получимъ, что

$$G_0 = M_0(V) = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

и, слѣдовательно, что

$$G_0 = \sqrt{\{Zy - Yz\}^2 + \{Xz - Zx\}^2 + \{Yx - Xy\}^2}.$$

Замѣтимъ, что формулы (1) влекутъ за собою равенство,

$$XL + YM + ZN = 0,$$

которое, впрочемъ, можетъ быть написано и непосредственно. на основаніи взаимной перпендикулярности вектора и его момента относительно любой точки, а, слѣдовательно, и относительно начала координатъ.

4. **Теорема.** *Моментъ вектора относительно какой-нибудь оси равняется суммѣ момента этого вектора относительно другой оси, параллельной данной, и момента относительно первой оси того же вектора, приложеннаго къ какой-нибудь точкѣ второй.*

Такъ какъ за одну изъ координатныхъ осей мы можемъ принять любую прямую въ пространствѣ, то, не нарушая общности предложенной теоремы, мы можемъ доказать ее для оси OX.

Возьмемъ двѣ координатныя системы прямоугольныхъ осей

$$OXYZ \text{ и } O_1X_1Y_1Z_1,$$

оси которыхъ попарно взаимно параллельны и положимъ, что координаты точки приложенія нѣкотораго вектора v относительно первой изъ нихъ суть

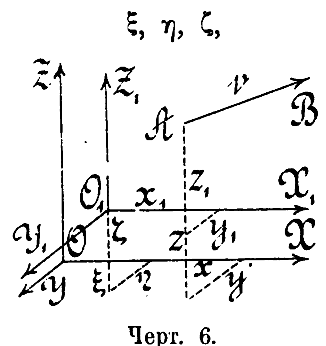
$$x, y, z,$$

а относительно второй

$$x_1, y_1, z_1$$

Назовемъ координаты начала второй системы относительно первой черезъ

$$\xi, \eta, \zeta,$$



Черт. 6.

проекціи нашего вектора на оси координатъ черезъ

$$X, Y, Z$$

и его моменты относительно осей первой системы черезъ

$$L, M, N,$$

а относительно осей второй черезъ

$$L_1, M_1, N.$$

Въ такомъ случаѣ мы будемъ имѣть

$$L = Zy - Yz,$$

имѣя же въ виду, что по извѣстнымъ формуламъ аналитической геометріи

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + \xi \\ y &= y_1 + \eta \\ z &= z_1 + \zeta \end{aligned}\right\},$$

получимъ

$$L = Z(y_1 + \eta) - Y(z_1 + \zeta) =$$
$$= Zy_1 - Yz_1 + Z\eta - Y\zeta,$$

а такъ какъ, при нашихъ обозначеніяхъ,

$$Zy_1 - Yz_1 = L_1$$

и

$$Z\eta - Y\zeta$$

представляетъ изъ себя моментъ относительно OX вектора v, приложеннаго къ точкѣ O_1, то мы можемъ написать, что

$$L = L_1 + M_x(V)_{o_1},$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

Послѣднюю формулу мы можемъ представить подъ видомъ

$$L = L_1 + Z\eta - Y\zeta,$$

а разсуждая относительно другихъ координатныхъ осей такъ же, какъ мы это сдѣлали относительно оси OX, получимъ

$$M = M_1 + X\zeta - Z\xi$$
$$N = N_1 + Y\xi - X\eta,$$

и такимъ образомъ будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= L - (Z\eta - Y\zeta) \\ M_1 &= M - (X\zeta - Z\xi) \\ N_1 &= N - (Y\xi - X\eta) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Теорема. *Моментъ вектора, относительно какой-нибудь точки, равняется геометрической суммѣ момента этого вектора, относительно какой-нибудь другой точки и момента, относительно первой точки, того же вектора, приложеннаго ко второй.*

Такъ какъ любую точку пространства можно принять за начало прямоугольной координатной системы, то, нисколько не нарушая общности предложенной теоремы, мы можемъ доказывать ее для началъ двухъ прямоугольныхъ координатныхъ системъ, оси которыхъ взаимно параллельны. Сохраняя обозначенія, принятыя при доказательствѣ предыдущей теоремы, мы можемъ написать

$$\overline{M_0(V)} = L + \overline{M} + N$$

или, принимая во вниманіе результатъ этой теоремы,

$$\overline{M_0(V)} = L_1 + \overline{M_x(V)_{0_1}} + \overline{M_1} + \overline{M_y(V)_{0_1}} + N_1 + \overline{M_z(V)_{0_1}},$$

а такъ какъ

$$\overline{L_1} + \overline{M_1} + \overline{N_1} = \overline{M_{0_1}(V)}$$

и

$$\overline{M_x(V)_{0_1}} + \overline{M_y(V)_{0_1}} + \overline{M_z(V)_{0_1}} = \overline{M_0(V)_{0_1}},$$

то мы будемъ имѣть

$$\overline{M_0(V)} = \overline{M_{0_1}(V)} + \overline{M_0(V)_{0_1}},$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

5. Объ относительномъ моментѣ двухъ векторовъ. Положимъ, что мы имѣемъ два вектора

$$AB = V_1$$

и

$$CD = V_2,$$

расположенныхъ на осяхъ l_1 и l_2 (черт. 7).

Если черезъ точку C оси l_2 проведемъ плоскость P, перпендикулярную къ этой оси, и построимъ проекцію ab на эту

плоскость вектора AB, то, согласно опредѣленію момента вектора относительно оси, мы будемъ имѣть

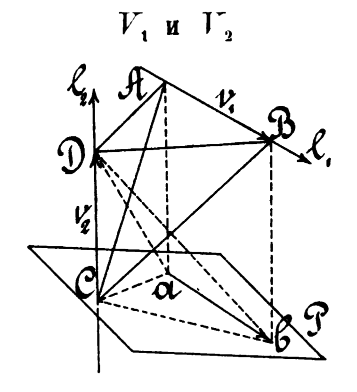
$$M_{l_2}(V_1) = 2\Delta\, Cab.$$

Соединивъ затѣмъ точки C и D съ точками A и B и точки C и D съ точками a и b, мы получимъ два тетраедра

$$CDAB,$$

построенный на векторахъ

$$V_1 \text{ и } V_2$$



Черт. 7.

и

$$CDab,$$

построенный на векторахъ

$$V_2 \text{ и } ab,$$

причемъ, если условимся обозначать объемъ тетраедра, построеннаго на векторахъ

$$V_1 \text{ и } V_2,$$

символомъ

$$vol(V_1,\ V_2),$$

то будемъ имѣть

$$vol(V_1,\ V_2) = vol(V_2, ab);$$

съ другой стороны

$$vol(V_2, ab) = \frac{\Delta\, Cab \,.\, V_2}{3},$$

откуда

$$\Delta\, Cab = \frac{3\,.\,vol(V_1, V_2)}{v_2}$$

и слѣдовательно

$$M_{l_2}(V_1) = \frac{6\, vol\,(V_1,\, V_2)}{V_2}\, .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

Разсуждая совершенно также относительно оси l_1, мы получимъ, что

$$M_{l_1}(V_2) = \frac{6\, vol\,(V_1,\, V_2)}{V_1}\, .\ .\ .\ .\ .\ .\ (4)$$

Относительнымъ моментомъ двухъ векторовъ будемъ называть ушестиренный объемъ тетраедра, построеннаго на этихъ векторахъ, а установивъ это опредѣленіе, видимъ, что формулы (3) и (4) выражаютъ слѣдующую теорему.

Теорема. *Моментъ вектора относительно какой-нибудь оси равняется относительному моменту даннаго вектора и какого-нибудь вектора, построеннаго на данной оси, раздѣленному на этотъ векторъ.*

Найдемъ аналитическое выраженіе относительнаго момента двухъ векторовъ. Положимъ, что наши векторы отнесены къ прямоугольной координатной системѣ въ пространствѣ (черт. 8) и пусть координаты точки приложенія вектора v_1 суть

$$x_1,\ y_1,\ z_1,$$

его проекціи на оси координатъ суть

$$X_1,\ Y_1,\ Z_1,$$

Черт. 8.

координаты точки приложенія вектора v_2 пусть будутъ

$$x_2, y_2, z_2,$$

а его проекціи на оси координатъ

$$X_2, Y_2, Z_2.$$

При этихъ обозначеніяхъ по общей формулѣ [1]) для объема тетраедра въ координатахъ его вершинъ мы будемъ имѣть

$$vol(V_1, V_2) = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & ; y_1 & ; z_1 & ; 1 \\ x_1 + X_1 ; & y_1 + Y_1 ; & z_1 + Z_1 ; & 1 \\ x_2 & ; y_2 & ; z_2 & ; 1 \\ x_2 + X_2 ; & y_2 + Y_2 ; & z_2 + Z_2 ; & 1 \end{vmatrix},$$

оттуда, вычитая изъ элементовъ второй и четвертой строкъ полученнаго опредѣлителя соотвѣтственно элементы его первой

---

[1]) Если вершины тетраедра суть

$$A_1(x_1, y_1, z_1);\ A_2(x_2, y_2, z_2);\ A_3(x_3, y_3, z_3);\ A_4(x_4, y_4, z_4)$$

и если мы условимся обозначать его объемъ символомъ

$$A_1 A_2 A_3 A_4,$$

сопровождаемымъ знакомъ $+$, если наблюдатель, стоящій по направленію отрѣзка

$$A_1 A_2$$

будетъ видѣть отрѣзокъ

$$A_3\ A_4$$

направленнымъ слѣва направо и знакомъ — въ противоположномъ случаѣ, то

$$A_1 A_2 A_3 A_4 = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1; & y_1; & z_1; & 1 \\ x_2; & y_2; & z_2; & 1 \\ x_3; & y_3; & z_3; & 1 \\ x_4; & y_4; & z_4; & 1 \end{vmatrix}$$

Весьма изящный выводъ этой формулы принадлежитъ французскому математику E. Lucas и заключается въ слѣдующемъ:

Положимъ, что имѣемъ 8 точекъ въ пространствѣ

$$A_1, A_2 \ldots\ldots\ldots, A_8$$

и третьей строкъ и разлагая затѣмъ этотъ опредѣлитель по элементамъ его четвертой колонны, получимъ

$$vol\,(V_1\ V_2) = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1; & y_1; & z_1; & 1 \\ X_1; & Y_1; & Z_1; & 0 \\ x_2; & y_2; & z_2; & 1 \\ X_2; & Y_2; & Z_2; & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\begin{vmatrix} X_1; & Y_1; & Z_1 \\ x_2; & y_2; & z_2 \\ X_2; & Y_2; & Z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1; & y_1; & z_1 \\ X_1; & Y_1; & Z_1 \\ X_2; & Y_2; & Z_2 \end{vmatrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{6}\left\{X_1 L_2 + Y_1 M_2 + Z_1 N_2 + X_2 L_1 + Y_2 M_1 + Z_2 N_1\right\}.$$

(черт. 9), причемъ координаты точки

A_i суть $x_i,\ y_i,\ z_i$

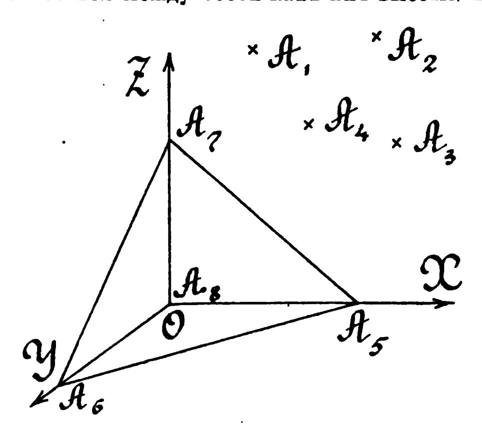
и найдемъ отношеніе объемовъ тетраедровъ

$A_1\ A_2\ A_3\ A_4$

и

$A_5\ A_2\ A_3\ A_4$

Эти объемы относятся между собой какъ ихъ высоты, что же касается



Черт. 9.

послѣднихъ, то онѣ суть разстоянія точекъ

A_1 и A_5

Такимъ образомъ, найдемъ относительный моментъ векторовъ V_1 и V_2 подъ видомъ

$$6\,vol\,(V_1, V_2) =$$
$$= X_1 L_2 + Y_1 M_2 + Z_1 N_2 + X_2 L_1 + Y_2 M_1 + Z_2 N_1$$

или, принимая во вниманіе равенства

$$X_1 L_1 + Y_1 M_1 + Z_1 N = 0$$

и

$$X_2 L_2 + Y_2 M_2 + Z_2 N_2 = 0,$$

подъ видомъ

$$6\,vol(V_1, V_2) =$$
$$= (X_1 + X_2)\,(L_1 + L_2) + (Y_1 + Y_2)\,(M_1 + M_2) +$$
$$+ (Z_1 + Z_2)\,(N_1 + N_2).$$

Замѣтимъ, что, имѣя аналитическое выраженіе относительнаго момента двухъ векторовъ, мы можемъ очень легко найти

отъ плоскости, проходящей черезъ три точки

$$A_2,\ A_3 \text{ и } A_4.$$

Такъ какъ уравненіе этой плоскости можетъ быть представлено подъ видомъ

$$\begin{vmatrix} x\,; & y\,; & z\,; & 1 \\ x_2; & y_2; & z_2; & 1 \\ x_3; & y_3; & z_3; & 1 \\ x_4; & y_4; & z_4; & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

то, на основаніи общей формулы для разстоянія отъ точки до плоскости высота тетраедра

$$A_1\ A_2\ A_3\ A_4$$

будетъ

$$h = \frac{1}{N} \begin{vmatrix} x_1; & y_1; & z_1; & 1 \\ x_2; & y_2; & z_2; & 1 \\ x_3; & y_3; & z_3; & 1 \\ x_4; & y_4; & z_4; & 1 \end{vmatrix},$$

гдѣ N есть параметръ плоскости, опредѣленный уравненіемъ (5), или

$$h = \frac{(1,\ 2,\ 3,\ 4)}{N},$$

аналитическое выраженіе момента даннаго вектора относительно любой оси. Съ этою цѣлью стоитъ только взять произвольный векторъ на этой оси, вычислить относительный моментъ этого и даннаго намъ векторовъ и полученное выраженіе раздѣлить на выбранный векторъ.

6. Подъ **системою векторовъ** мы будемъ разумѣть совокупность векторовъ, какъ-нибудь расположенныхъ въ пространствѣ.

Главнымъ векторомъ данной системы будемъ называть геометрическую сумму ея векторовъ.

Главнымъ моментомъ данной системы, **относительно** какой-нибудь **точки**, будемъ называть геометрическую сумму момен-

---

если подъ символомъ

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

вообще будемъ разумѣть опредѣлитель вида

$$\begin{vmatrix} x_\alpha ; y_\alpha ; z_\alpha ; 1 \\ x_\beta ; y_\beta ; z_\beta ; 1 \\ x_\gamma ; y_\gamma ; z_\gamma ; 1 \\ x_\delta ; y_\delta ; z_\delta ; 1 \end{vmatrix}$$

Высота тетраедра

$$A_5\ A_2\ A_3\ A_4$$

будетъ

$$h_1 = \frac{(5,\ 2,\ 3,\ 4}{N}$$

и, слѣдовательно, мы будемъ имѣть

$$\frac{A_1\,A_2\,A_3\,A_4}{A_5\,A_2\,A_3\,A_4} = \frac{(1,2,3,4)}{(5,2,3,4)}; \qquad (6)$$

точно также найдемъ, что

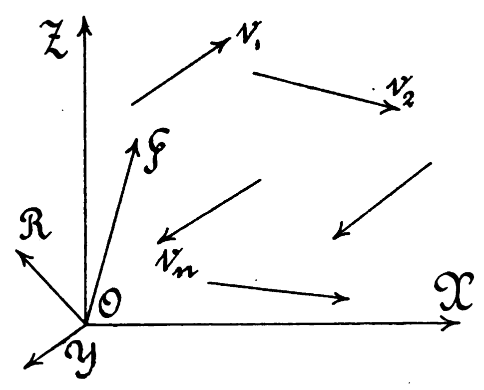
$$\left.\begin{aligned} \frac{A_5\,A_2\,A_3\,A_4}{A_5\,A_6\,A_3A_4} &= \frac{(5,2,3,4)}{(5,6,3,4)} \\ \frac{A_5\,A_6\,A_3\,A_4}{A_5\,A_6\,A_7\,A_4} &= \frac{(5,6,3,4)}{(5,6,7,4)} \\ \frac{A_5\,A_6\,A_7\,A_4}{A_5\,A_6\,A_7\,A_8} &= \frac{(5,6,7,4)}{(5,6,7,8)} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

товъ, относительно этой точки, всѣхъ векторовъ разсматриваемой системы.

Положимъ, что мы имѣемъ нѣкоторую систему векторовъ

$$V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_n,$$

отнесенную къ прямоугольной системѣ координатныхъ осей



Черт. 10.

въ пространствѣ (черт. 10) и назовемъ проекціи на оси координатъ вектора

$$V_i$$

черезъ

$$X_i\ ,\ Y_i\ ,\ Z_i\ ,$$

Перемножая равенства (6) и (7), получимъ

$$\frac{A_1 A_2 A_3 A_4}{A_5 A_6 A_7 A_8} = \frac{(1,2,3,4)}{(5,6,7,8)}$$

Если теперь положимъ, что точки

$$A_5,\ A_6 \text{ и } A_7$$

лежатъ на осяхъ координатъ въ разстояніяхъ единицы отъ начала и, слѣдовательно, имѣютъ своими координатами соотвѣтственно

$$(1,0,0);\ (0,1,0);\ (0,0,1),$$

а точка

$$A_8$$

въ началѣ координатъ и имѣетъ, слѣдовательно, координатами

$$(0,\ 0,\ 0),$$

моментъ этого вектора, относительно начала координатъ, черезъ

$$G_{i,0},$$

а его проекціи на оси координатъ или моменты разсматриваемаго вектора, относительно координатныхъ осей, черезъ

$$L_i\,,\ M_i\,,\ N_i\,.$$

Назовемъ затѣмъ главный векторъ нашей системы черезъ

$$R,$$

его проекціи на оси координатъ черезъ

$$X,\ Y,\ Z,$$

главный моментъ этой системы относительно начала координатъ назовемъ черезъ

$$G_0,$$

а его проекціи на оси координатъ черезъ

$$L,\ M,\ N.$$

то будемъ имѣть, что

$$A_5\,A_6\,A_7\,A_8 = -\frac{1}{6}\,,$$

гдѣ знакъ — поставленъ согласно вышеприведенному условію относительно знака символа, выражающаго объемъ тетраедра; съ другой стороны, въ такомъ случаѣ

$$(5,\ 6,\ 7,\ 8) = \begin{vmatrix} 1; & 0; & 0; & 1 \\ 0; & 1; & 0; & 1 \\ 0; & 0; & 1; & 1 \\ 0; & 0; & 0; & 1 \end{vmatrix} = 1$$

и, слѣдовательно, мы будемъ имѣть

$$A_1\,A_2\,A_3\,A_4 = -\frac{(1, 2, 3, 4)}{6} = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1; & y_1; & z_1; & 1 \\ x_2; & y_2; & z_2; & 1 \\ x_3; & y_3; & z_3; & 1 \\ x_4; & y_4; & z_4; & 1 \end{vmatrix}$$

Въ такомъ случаѣ, согласно приведеннымъ опредѣленіямъ, мы будемъ имѣть

$$\overline{R}=\overline{V_1}+\overline{V_2}+\cdots\cdots+\overline{V_n}$$

$$\overline{G_0}=\overline{G_{1,0}}+\overline{G_{2,0}}+\cdots\cdots+\overline{G_{n,0}}$$

и слѣдовательно

$$X=\sum_{i=1}^{i=n} X_i, Y=\sum_{i=1}^{i=n} Y_i, Z=\sum_{i=1}^{i=n} Z_i$$

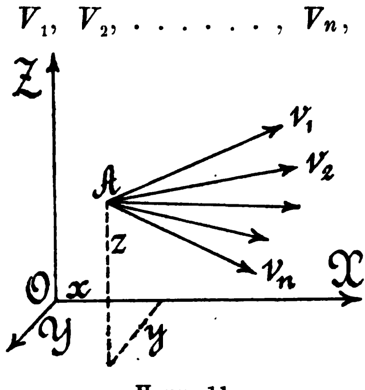
$$L=\sum_{i=1}^{i=n} L_i, M=\sum_{i=1}^{i=n} M_i, N=\sum_{i=1}^{i=n} N_i\,.$$

Теорема Вариніона. *Моментъ, относительно какой-нибудь оси, геометрической суммы векторовъ, проведенныхъ изъ одной и той же точки пространства, равенъ суммѣ моментовъ, относительно той же оси, векторовъ разсматриваемой системы.*

Имѣя въ виду, что любая прямая можетъ быть принята за одну изъ координатныхъ осей, не нарушая общности предложенной теоремы, докажемъ ее для оси OX.

Положимъ, что мы имѣемъ систему векторовъ

$$V_1,\ V_2,\ \ldots\ldots,\ V_n,$$



Черт. 11.

проведенныхъ изъ точки A, координаты которой суть

$$x,\ y,\ z.$$

Въ такомъ случаѣ, сохраняя вышеприведенныя обозначенія, мы можемъ написать, что

$$L_i = Z_i y - Y_i z$$

и, слѣдовательно, что

$$\sum_{i=1}^{i=n} L_i = y \sum_{i=1}^{i=n} Z_i - z \sum_{i=n}^{i=n} Y_i \ ;$$

или

$$\sum_{i=1}^{i=n} L_i = yZ - zY,$$

откуда видимъ, что

$$M_x(R) = M_x(V_1) + M_x(V_2) + \cdots\cdots + M_x(V_n),$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

Теорема. *Моментъ, относительно какой-нибудь точки, геометрической суммы векторовъ, проведенныхъ изъ одной и той же точки пространства, равняется геометрической суммѣ моментовъ этихъ векторовъ, относительно той же точки.*

Въ самомъ дѣлѣ, написавъ равенства, выражающія предыдущую теорему для всѣхъ трехъ координатныхъ осей:

$$M_x(R) = M_x(V_1) + M_x(V_2) + \cdots\cdots + M_x(V_n)$$
$$M_y(R) = M_y(V_1) + M_y(V_2) + \cdots\cdots + M_y(V_n)$$
$$M_z(R) = M_z(V_1) + M_z(V_2) + \cdots\cdots + M_z(V_n),$$

мы будемъ имѣть

$$\overline{M_0(R)} = \overline{M_0(V_1)} + \overline{M_0(V_2)} + \cdots\cdots + \overline{M_0(V_n)},$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

Замѣтимъ, что, согласно принятымъ нами обозначеніямъ,

$$L = \sum_{i=1}^{i=n} L_i\,,\ M = \sum_{i=1}^{i=n} M_i\,,\ N = \sum_{i=1}^{i=n} N_i$$

и значитъ, для системы векторовъ, проведенныхъ изъ одной и той же точки пространства, мы будемъ имѣть, что

$$L = M_x(R),\ M = M_y(R),\ N = M_z(R)$$

и, слѣдовательно, что

$$G_0 = M_0(R),$$

откуда видимъ, что только что доказанная теорема можетъ быть формулирована слѣдующимъ образомъ.

Главный моментъ, относительно какой-нибудь точки, системы векторовъ, проведенныхъ изъ одной и той же точки пространства, равняется моменту, относительно данной точки, главнаго вектора разсматриваемой системы.

7. Теорема. *Главный моментъ системы векторовъ, относительно какой-нибудь точки, равенъ геометрической суммѣ ея главнаго момента, относительно какой-нибудь другой точки, и момента, относительно первой точки, главнаго вектора данной системы, приложеннаго ко второй.*

Положимъ, что мы имѣемъ систему векторовъ

$$V_1,\ V_2,\ \ldots\ldots\ V_n$$

(чер. 12) и назовемъ ея главный векторъ черезъ

$$R,$$

а ея главные моменты, относительно какихъ-нибудь точекъ A и B, соотвѣтственно черезъ

$$G_A \text{ и } G_B.$$

На основанiи послѣдней изъ теоремъ n° 4, мы будемъ имѣть

$$\overline{M_A(V_1)} = \overline{M_B(V_1)} + \overline{M_A(V_1)_B}$$

$$\overline{M_A(V_2)} = \overline{M_B(V_2)} + \overline{M_A(V_2)_B}$$

. . . .

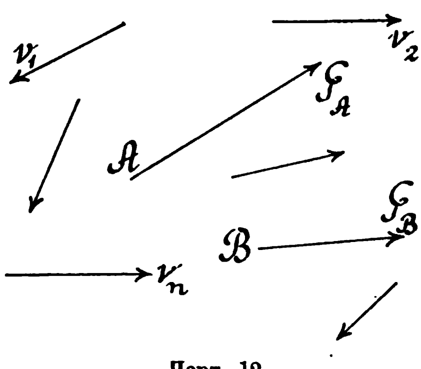
. . . .

. . . .

. . . .

$$\overline{M_A(V_n)} = \overline{M_B(V_n)} + \overline{M_A(V_n)_B}$$

Складывая же геометрически эти равенства почленно между собой, на основаніи опредѣленія главнаго момента



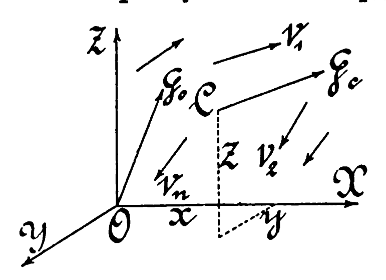
Черт. 12.

системы векторовъ относительно точки и предыдущей теоремы, получимъ

$$G_A = G_B + \overline{M_A\,(R)_B}\,,$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

Положимъ теперь, что разсматриваемая нами система векторовъ отнесена къ прямоугольной координатной системѣ



Черт. 13.

(чер. 13) и назовемъ проекціи на оси координатъ ея глав наго вектора

$$R$$

черезъ

$$X,\ Y,\ Z,$$

а проекціи на эти оси ея главныхъ моментовъ

$$G_0 \text{ и } G_c\,,$$

относительно начала координатъ и относительно какой-нибудь точки C съ координатами x, y, z, соотвѣтственно черезъ

$$L,\ M,\ N \text{ и } L_1,\ M_1,\ N_1.$$

Такъ какъ, на основаніи предыдущей теоремы,

$$\overline{G_0} = \overline{G_c} + \overline{M_0\,(R)_c}\,,$$

то

$$G_c = \overline{G_0} - \overline{M_0\,(R)_c}$$

и слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= L - (Zy - Yz) \\ M_1 &= M - (Xz - Zx) \\ N_1 &= N - (Yx - Xy) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

и

$$G_c =$$
$$= \sqrt{\left\{L - (Zy - Yz)\right\}^2 + \left\{M - (Xz - Zx)\right\}^2 + \left\{N - (Yx - Xy)\right\}^2}. \quad (9)$$

Разсматривая полученное выраженіе, мы видимъ, что главный моментъ системы векторовъ, относительно какой-нибудь точки, зависитъ, вообще говоря, отъ координатъ послѣдней и, слѣдовательно, измѣняется, при переходѣ отъ одной точки пространства къ другой.

Въ частномъ случаѣ, если главный векторъ системы равняется нулю, т. е. если

$$R = 0,$$

а слѣдовательно и

$$X = Y = Z = 0,$$

мы видимъ, что

$$G_c = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2} = G_0,$$

откуда заключаемъ, что въ этомъ случаѣ главный моментъ системы векторовъ, относительно всѣхъ точекъ пространства, остается однимъ и тѣмъ же.

Мы будемъ предполагать, что

$$R \neq 0$$

и постараемся прослѣдить вышеупомянутое измѣненіе главнаго момента системы векторовъ, при измѣненіи точки, относительно которой этотъ моментъ берется. Съ этой цѣлью прежде всего найдемъ такую точку пространства, относительно которой разсматриваемый главный моментъ будетъ имѣть наименьшее значеніе; этотъ вопросъ сводится къ отысканію min-а функціи, стоящей подъ корнемъ выраженія (9), или къ отысканію min-а функціи

$$\varphi\,(x,\ y,\ z),$$

опредѣляемой равенствомъ

$$\varphi\,(x,y,z) = \left\{L - (Zy - Yz)\right\}^2 + \left\{M - (Xz - Zx)\right\}^2 + \\ + \left\{N - (Yx - Xy)\right\}^2.$$

Поступая по общимъ правиламъ дифференціальнаго исчисленія, мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= 2\left\{M - (Xz - Zx)\right\}Z - 2\left\{N - (Yx - Xy)\right\}Y = 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= 2\left\{N - (Xx - Xy)\right\}X - 2\left\{L - (Zy - Yz)\right\}Z = 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} &= 2\left\{L - (Zy - Yz)\right\}Y - 2\left\{M - (Xz - Zx)\right\}X = 0 \end{aligned}\right\}, \quad (10)$$

откуда видимъ, что значенія координатъ, дающія разсматриваемой функціи наименьшее или наибольшее значеніе, должны удовлетворять уравненіямъ

$$\frac{L - (Zy - Yz)}{X} = \frac{M - (Xz - Zx)}{Y} = \frac{N - (Yx - Xy)}{Z} \quad . \quad . \quad (11)$$

Чтобы рѣшить, будутъ ли, опредѣляемыя такимъ образомъ,

значенія координатъ обращать разсматриваемую нами функцію въ max. или min., составимъ выраженіе полнаго дифференціала второго порядка этой функціи.

Мы будемъ имѣть

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 2Z^2 + 2Y^2$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 2X^2 + 2Z^2$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 2Y^2 + 2X^2$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = -2XY;\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} = -2YZ;\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} = -2ZX$$

и, слѣдовательно, получимъ

$$d^2\varphi = 2\{(Z^2 + Y^2)\,dx^2 + (X^2 + Z^2)\,dy^2 +$$

$$+ (Y^2 + X^2)\,dz^2 - 2XY\,dxdy - 2YZdydz - 2ZX\,dzdx$$

или

$$d^2\varphi = 2\{(Xdy - Ydx)^2 + (Ydz - Zdy)^2 + (Zdx - Xdz)^2\},$$

откуда видно, что

$$d^2\varphi > 0$$

и, слѣдовательно, разматриваемая нами функція, при значеніяхъ координатъ, удовлетворяющихъ уравненіямъ (11), принимаетъ наименьшее значеніе.

Уравненія (11) представляютъ изъ себя уравненія прямой и легко могутъ быть приведены къ обычной формѣ этихъ уравненій подъ видомъ пропорціи.

Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая первое изъ уравненій (10), изъ коихъ получены уравненія (11), мы можемъ представить его подъ видомъ

$$MZ - NY - ZXz - YXy + Y^2x + Z^2x = 0,$$

откуда, прибавляя къ лѣвой части и вычитая изъ нея по

$$X^2x,$$

получимъ

$$x(X^2+Y^2+Z^2)-X(Xx+Yy+Zz)+MZ-NY=0$$

и такимъ образомъ будемъ имѣть

$$x-\frac{YN-ZM}{R^2}=X\frac{Xx+Yy+Zz}{R^2}.$$

Точно также изъ второго и третьяго изъ равенствъ (10) найдемъ

$$y-\frac{ZL-XN}{R^2}=Y\frac{Xx+Yy+Zz}{R^2}$$

$$z-\frac{XM-YL}{R^2}=Z\frac{Xx+Yy+Zz}{R^2},$$

откуда, полагая, что

$$\frac{YN-ZM}{R^2}=\alpha;\quad \frac{ZL-XN}{R^2}=\beta;\quad \frac{XM-YL}{R^2}=\gamma,$$

получимъ уравненіе прямой, относительно точекъ которой главные моменты разсматриваемой нами системы векторовъ имѣютъ наименьшее значеніе, подъ видомъ

$$\frac{x-\alpha}{X}=\frac{y-\beta}{Y}=\frac{z-\gamma}{Z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Прямую, относительно точекъ которой главные моменты данной системы векторовъ имѣютъ наименьшее значеніе, мы будемъ называть **центральною осью** этой системы векторовъ и, разсматривая ея уравненія или въ формѣ (11) или въ формѣ (12), будемъ имѣть слѣдующія теоремы, выражающія ея свойства.

Теорема I. *Центральная ось системы векторовъ, главный векторъ которой отличенъ отъ нуля, параллельна этому главному вектору.*

Эта теорема непосредственно вытекаетъ изъ уравненій (12).

Теорема II. *Главные моменты системы векторовъ, относительно всѣхъ точекъ ея центральной оси, равны между собой.*

Теорема III. *Главные моменты системы векторовъ, относительно точекъ ея центральной оси, направлены вдоль послѣдней.*

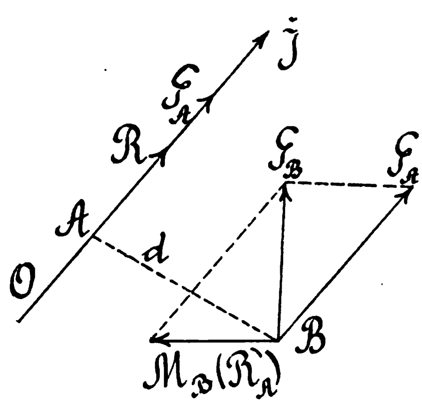
Эта теорема вытекаетъ изъ того, что, на основаніи формулъ (8), уравненія (11) могутъ быть приведены къ виду

$$\frac{L_1}{X}=\frac{M_1}{Y}=\frac{N_1}{Z},$$

а эта пропорція и доказываетъ предложенную теорему.

8. **Теорема.** *Главные моменты системы векторовъ относительно точекъ, лежащихъ на поверхности круговою цилиндра, осью которой служитъ центральная ось разсматриваемой нами системы, равны между собой и одинаково наклонены къ направленію центральной оси; чѣмъ больше радіусъ упомянутой цилиндрической поверхности, тѣмъ главные моменты системы векторовъ, относительно ея точекъ, больше и тѣмъ подъ большими углами они наклонены къ направленію центральной оси.*

Положимъ, что мы имѣемъ нѣкоторую систему, для ко-



Черт. 14.

торой прямая OJ (черт. 14) служитъ центральною осью. Назовемъ главный векторъ нашей системы черезъ

$$R,$$

ея главный моментъ, относительно какой-нибудь точки A центральной оси, черезъ

$$G_A$$

и замѣтимъ, что по предыдущему оба эти вектора направлены вдоль центральной оси (въ одну и ту же или въ разныя стороны, въ зависимости отъ разсматриваемой системы векторовъ). Взявъ затѣмъ какую-нибудь точку B, лежащую внѣ центральной оси и называя главный моментъ разсматриваемой системы, относительно этой точки, черезъ

$$G_B,$$

мы будемъ имѣть

$$\overline{G_B} = \overline{G_A} + \overline{M_B(R)_A} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

Съ другой стороны

$$M_B(R)_A \perp OJ$$

и

$$M_B(R)_A = Rd,$$

гдѣ d есть разстояніе точки B отъ оси OJ. Слѣдовательно,

$$G_B = \sqrt{G_A^2 + R^2 d^2}$$

и

$$tng\,(\widehat{G_B, J}) = \frac{Rd}{G_A}.$$

Разсматривая же полученныя формулы, мы убѣждаемся въ справедливости предложенной теоремы, ибо, при постоянномъ d,

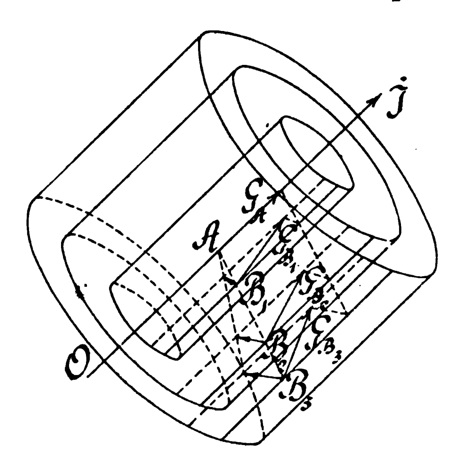
$$G_B \text{ и } \widehat{G_B, J}$$

остаются постоянными и увеличиваются съ возрастаніемъ d.

На основаніи только что доказанной теоремы, мы видимъ, что главные моменты системы векторовъ, для которой прямая

$$OJ$$

служитъ центральною осью, относительно различныхъ точекъ



Черт. 15.

пространства, распредѣляются такъ, какъ показано на чертежѣ 15.

Теорема. *Проекція на направленіе центральной оси главнаго момента системы векторовъ, относительно любой точки пространства, есть величина постоянная и равняется главному моменту разсматриваемой системы относительно точекъ ея центральной оси.*

Въ самомъ дѣлѣ,

$$пр_J\, G_B = G_B\, Cos\, (\widehat{G_B, J}),$$

а такъ какъ, на основаніи предыдущей теоремы,

$$Cos\, (\widehat{G_B, J}) = \frac{G_A}{\sqrt{G_A{}^2 + R^2 d^2}} = \frac{G_A}{G_B},$$

то

$$пр_J\, G_B = G_A\,,$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

9. Мы видѣли въ предыдущемъ §, какимъ образомъ измѣняется главный моментъ данной системы векторовъ отно-

сительно различныхъ точекъ пространства; что же касается главнаго вектора, то онъ для данной системы остается постояннымъ, при какой бы точкѣ пространства мы его ни строили. Такимъ образомъ, величина

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

остается неизмѣнной для данной системы векторовъ.

Помножая затѣмъ полученныя выше равенства:

$$L_1 = L - (Zy - Yz)$$
$$M_1 = M - (Xz - Zx)$$
$$N_1 = N - (Yx - Xy)$$

соотвѣтственно на X, Y и Z и складывая ихъ между собой, мы будемъ имѣть

$$L_1X + M_1Y + N_1Z = LX + MY + NZ$$

или

$$\overline{G_c R} = \overline{G_0 R},$$

откуда видимъ, что геометрическое произведеніе главнаго момента системы векторовъ, относительно какой-нибудь точки пространства, на ея главный векторъ, для данной системы векторовъ, остается неизмѣннымъ, при переходѣ отъ одной точки пространства къ другой.

На основаніи изложеннаго, выраженія

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

и

$$\overline{RG_0} = LX + MY + NZ$$

т. е. главный векторъ системы и его геометрическое произведеніе на ея главный моментъ, относительно какой-нибудь точки пространства, будемъ называть **инваріантами** данной системы векторовъ.

Инваріанты системы векторовъ будемъ обозначать буквами

$$J_1 \text{ и } J_2,$$

полагая, что

$$J_1 = LX + MY + NZ$$
$$J_2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

10. **Взаимно эквивалентными системами векторовъ** мы будемъ называть такія двѣ системы, для которыхъ ихъ главные векторы и ихъ главные моменты, относительно какой-нибудь точки пространства, геометрически равны между собой.

Теорема. *Если двѣ системы векторовъ взаимно эквивалентны, то ихъ главные моменты, относительно любой точки пространства, геометрически равны между собой.*

Положимъ, что мы имѣемъ двѣ системы векторовъ

$$V_1,\ V_2,\ \ldots\ldots,\ V_n$$

и

$$V_1',\ V'_2,\ \ldots\ldots,\ V'_n$$

и назовемъ ихъ главные векторы соотвѣтственно черезъ

$$R \text{ и } R',$$

а ихъ главные моменты, относительно какой-нибудь точки, черезъ

$$G \text{ и } G'$$

съ соотвѣтственными указателями.

Положимъ далѣе, что эти системы взаимно эквивалентны, т. е. пусть

$$\left.\begin{array}{l} \overline{R} = \overline{R'} \\ \overline{G_A} = \overline{G'_A} \end{array}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

гдѣ A есть нѣкоторая точка пространства. Взявъ какую-нибудь другую точку B, мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{array}{l} \overline{G_B} = \overline{G_A} + \overline{M_B(R)_A} \\ \overline{G'_B} = \overline{G'_A} + \overline{M_B(R')_A} \end{array}\right\},$$

откуда, на основаніи равенствъ (14), получимъ, что

$$\overline{G_B} = \overline{G'_B},$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

Теорема. *Для того, чтобы двѣ системы векторовъ были взаимно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы проекціи на оси координатъ изъ главныхъ векторовъ и главныхъ моментовъ, относительно начала координатъ, были равны между собой.*

Сохраняя обозначенія предыдущей теоремы, назовемъ проекціи на оси координатъ главныхъ векторовъ разсматриваемыхъ нами системъ соотвѣтственно черезъ

$$X,\ Y,\ Z \text{ и } X',\ Y',\ Z',$$

а проекціи на эти оси ихъ главныхъ моментовъ

$$G_0 \text{ и } G'_0,$$

относительно начала координатъ, соотвѣтственно черезъ

$$L,\ M,\ N \text{ и } L',\ M',\ N'$$

Если разсматриваемыя нами системы взаимно эквивалентны, то, на основаніи опредѣленія такихъ системъ и предыдущей теоремы, мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{array}{l} \overline{R} = \overline{R'} \\ \overline{G_0} = \overline{G'_0} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

и слѣдовательно получимъ, что

$$\left.\begin{array}{l} X = X',\ Y = Y',\ Z = Z' \\ L = L',\ M = M',\ N = N' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Обратно, если будутъ имѣть мѣсто равенства (16), то будутъ справедливы и геометрическія равенства (15), а значитъ разсматриваемыя нами системы векторовъ будутъ взаимно эквивалентны, и предложенная теорема, слѣдовательно, доказана вполнѣ.

11. **Системою векторовъ, эквивалентною нулю,** мы будемъ называть такую систему, для которой ея главный векторъ и главный моментъ, относительно какой-нибудь точки пространства, равны нулю.

Теорема. *Если система векторовъ эквивалентна нулю, то ея главный моментъ, относительно любой точки пространства, равняется нулю.*

Положимъ, что имѣемъ систему векторовъ

$$V_1,\ V_2,\ \ldots\ldots\ldots,\ V_n,$$

главный векторъ которой обозначимъ черезъ

$$R,$$

а главный моментъ, относительно какой-нибудь точки, черезъ

$$G$$

съ соотвѣтственнымъ указателемъ. Положимъ, что разсматриваемая система эквивалентна нулю, такъ что

$$\left.\begin{array}{l} R\ = 0 \\ G_A = 0 \end{array}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

гдѣ A есть нѣкоторая точка пространства. Взявъ какую-нибудь точку B, мы будемъ имѣть

$$\overline{G_B} = \overline{G_A} + \overline{M_B(R)_A}$$

и слѣдовательно, на основаніи равенствъ (17), получимъ, что

$$G_B = 0,$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

Теорема. *Для того, чтобы система векторовъ была эквивалентна нулю, необходимо и достаточно, чтобы проекціи на оси координатъ ея главнаго вектора и главнаго момента, относительно начала координатъ, были равны нулю.*

Сохраняя обозначенія, принятыя при доказательствѣ предыдущей теоремы, положимъ, что проекціи на оси координатъ главнаго вектора разсматриваемой системы суть

$$X,\ Y,\ Z,$$

а проекціи на эти оси ея главнаго момента

$$G_0,$$

относительно начала координатъ, суть

$$L,\ M,\ N.$$

Если разсматриваемая нами система векторовъ эквивалентна нулю, то, на основаніи опредѣленія такой системы и предыдущей теоремы, мы будемъ имѣть

$$R = 0 \text{ и } G_0 = 0, \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

но тогда и

$$\left.\begin{array}{l} X = Y = Z = 0 \\ L = M = N = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

Обратно, если будутъ имѣть мѣсто равенства (19), то будутъ справедливы и равенства (18), а значитъ разсматриваемая нами система будетъ эквивалентна нулю и предложенная теорема, слѣдовательно, доказана вполнѣ.

Теорема. *Для того, чтобы двѣ системы векторовъ были эквивалентны между собой, необходимо и достаточно, чтобы система, составленная изъ векторовъ одной изъ данныхъ системъ и векторовъ, геометрически противоположныхъ векторамъ другой, была эквивалентна нулю.*

Положимъ, что имѣемъ двѣ системы векторовъ

$$V_1,\ V_2,\ V_3, \ldots,\ V_n \quad \ldots \quad (I)$$

и

$$V_1',\ V_2',\ V_3',\ \ldots,\ V'_m \quad \ldots \quad (II)$$

и что ихъ главные векторы суть

$$R \text{ и } R',$$

а главные моменты, относительно какой-нибудь точки A пространства, суть

$$G_A \text{ и } G'_A$$

Введемъ въ разсмотрѣніе систему векторовъ

$$V_1'', \; V_2'', \; V_3'', \; \ldots\ldots, \; V''m, \; \ldots\ldots \text{(III)}$$

удовлетворяющихъ условіямъ

$$\overline{V_i''} = -\overline{V_i'}, \text{ гдѣ } i = 1, \; 2, \; 3, \; \ldots\ldots, \; m$$

и назовемъ ея главный векторъ черезъ

$$R'',$$

а ея главный моментъ, относительно точки A, черезъ

$$G_A''$$

Въ такомъ случаѣ мы будемъ имѣть

и

$$\left.\begin{aligned} R'' &= -R' \\ G''_A &= -G'_A \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (20)$$

Положимъ теперь, что системы (I) и (II) взаимно эквивалентны; тогда

$$\overline{R} = \overline{R'}$$

и

$$\overline{G_A} = G_A',$$

и слѣдовательно, на основаніи равенствъ (20)

$$\overline{R} + \overline{R''} = 0$$

и

$$\overline{G_A} + \overline{G''_A} = 0$$

и значитъ система, состоящая изъ совокупности векторовъ системъ (I) и (III), эквивалентна нулю.

Обратно, если система, состоящая изъ совокупности век-

торовъ системъ (I) и (III), эквивалентна нулю, то мы будемъ имѣть

$$R + R'' = 0$$

$$G_A + G''_A = 0$$

и слѣдовательно, на основаніи равенствъ (20), получимъ

$$R = R'$$

и

$$G_A = G'_A,$$

откуда видимъ, что системы (I) и (II) взаимно эквивалентны, и наша теорема, значитъ, доказана вполнѣ.

12. **Преобразованіемъ** системы векторовъ будемъ называть такія операціи, совершаемыя съ принадлежащими ей векторами, посредствомъ которыхъ данная система приводится къ другой ей эквивалентной.

Теорема. *Система векторовъ останется эквивалентной самой себѣ:*

1) Если прибавить къ ней или откинуть отъ нея два, равныхъ и прямо противоположныхъ, вектора.

2) Если перемѣстить точку приложенія какого-нибудь вектора системы по его направленію,

и 3) Если замѣнить векторы, исходящіе изъ одной и той же точки, ихъ геометрической суммой или обратно, если какой-нибудь векторъ системы замѣнить векторами, исходящими изъ его точки приложенія и составляющими его геометрическія слагаемыя.

Справедливость этой теоремы подтверждается тѣмъ, что, при всѣхъ перечисленныхъ въ ней операціяхъ, главный векторъ системы и ея главный моментъ, относительно любой точки пространства, остаются неизмѣнными.

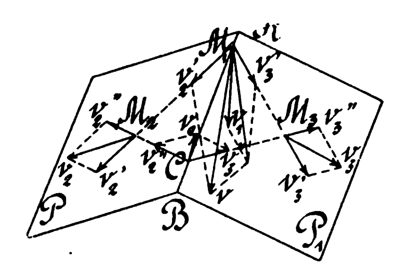
Указанные въ предыдущей теоремѣ три пріема преобразованія системы векторовъ часто называются **элементарными пріемами ея преобразованія.**

13. **Теорема.** *Всякая система векторовъ можетъ быть приведена къ двумъ векторамъ.*

Докажемъ сначала предложенную теорему для системы трехъ векторовъ, а затѣмъ распространимъ ее на случай системы какого угодно числа векторовъ. Положимъ, что имѣемъ систему трехъ векторовъ

$$V_1, \ V_2, \ V_3,$$

приложенныхъ соотвѣтственно въ точкахъ M_1, M_2 и M_3 (чер. 16). Проведемъ плоскость P черезъ точку M_1 и век-



Черт. 16.

торъ V_2 и плоскость P_1 черезъ точку M_1 и векторъ V_3 и положимъ, что эти плоскости пересѣкутся по прямой AB.

Выбравъ затѣмъ произвольную точку C на этой прямой, соединимъ ее и точку M_1 съ точками M_2 и M_3 и разложимъ векторъ V_2 на два V_2' и V_2'' по направленіямъ прямыхъ $M_2\, M_1$ и $M_2\, C$ такъ, чтобы имѣло мѣсто равенство

$$\overline{V_2} = \overline{V_2'} + \overline{V_2''}$$

Точно также разложимъ векторъ V_3 на два V_3' и V_3'' по направленіямъ $M_3\, M_1$ и $M_3\, C$ такъ, чтобы имѣло мѣсто равенство

$$\overline{V_3} = \overline{V_3'} + \overline{V_3''}$$

Перенеся затѣмъ векторы V_2' и V_3' по направленіямъ прямыхъ, вдоль которыхъ они расположены, въ точку M_1, а

векторы V_2'' и V_3'' въ точку C, замѣнимъ системы трехъ векторовъ

$$V_1,\ V_2' \text{ и } V_3'$$

и двухъ векторовъ

$$V_2'' \text{ и } V_3''$$

векторами

$$V \text{ и } V_0,$$

представляющими соотвѣтственно ихъ геометрическія суммы.

Описанныя здѣсь операціи, согласно предыдущей теоремѣ, превращаютъ систему векторовъ, къ которой онѣ примѣняются, въ эквивалентную ей систему, а такъ какъ онѣ приводятъ систему трехъ векторовъ

$$V_1,\ V_2 \text{ и } V_3$$

къ системѣ двухъ

$$V \text{ и } V_0,$$

то, для системы трехъ векторовъ, предложенная теорема доказана.

Для того, чтобы распространить разсматриваемую нами теорему на случай какого угодно числа векторовъ, положимъ, что мы имѣемъ систему $n+1$ вектора

$$V_1,\ V_2,\ V_3,\ \ldots\ldots,\ V_n,\ V_{n+1}$$

и, допустивъ, что эта теорема справедлива для n векторовъ, докажемъ, что она будетъ справедлива и для $n+1$ вектора; этимъ мы докажемъ справедливость нашей теоремы вообще.

Итакъ, положимъ, что разсматриваемая нами теорема справедлива для первыхъ n векторовъ нашей системы, т. е. положимъ, что эта система приводится къ двумъ векторамъ

$$V_1' \text{ и } V_2';$$

тогда вся разсматриваемая нами система приведется къ тремъ векторамъ

$$V_1',\ V_2' \text{ и } V_{n+1}$$

а слѣдовательно, по предыдущему, и къ двумъ:

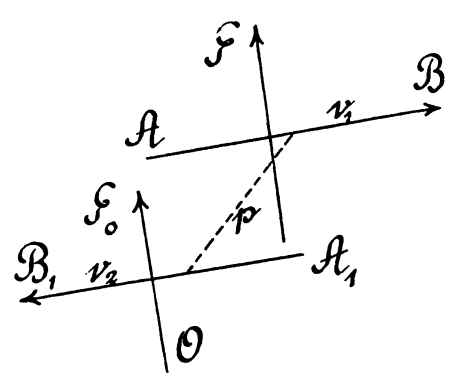
$$V \text{ и } V_0.$$

Такимъ образомъ теорема становится справедливою и для системы $n+1$ вектора, а значитъ она справедлива вообще.

14. **Парою векторовъ** будемъ называть систему двухъ векторовъ, равныхъ между собой, взаимно параллельныхъ, направленныхъ въ разныя стороны и приложенныхъ къ разнымъ точкамъ пространства.

Теорема. *Главный векторъ пары равенъ нулю, а ея главный моментъ не зависитъ отъ положенія точки, относительно которой онъ берется, и равняется произведенію изъ общей величины векторовъ данной пары на разстояніе между ними.*

Первая часть предложенной теоремы непосредственно вытекаетъ изъ опредѣленія пары векторовъ, для того же,



Черт. 17.

чтобы доказать ея вторую часть, положимъ, что мы имѣемъ нѣкоторую пару векторовъ

$$V_1 \text{ и } V_2$$

(чер. 17) и вычислимъ ея главный моментъ относительно какой-нибудь точки O пространства. Называя этотъ главный моментъ черезъ

$$G_0,$$

мы будемъ имѣть

$$\overline{G_0} = \overline{M_0(V_1)} + \overline{M_0(V_2)},$$

а такъ какъ

$$\overline{M_0(V_2)} = \overline{M_A(V_2)} + \overline{M_0(V_2)_A},$$

то

$$\overline{G_0} = \overline{M_0(V_1)} + \overline{M_0(V_2)_A} + \overline{M_A(V_2)},$$

но

$$\overline{M_0(V_1)} + \overline{M_0(V_2)_A} = 0,$$

такъ какъ въ этомъ случаѣ мы имѣемъ геометрическую сумму моментовъ, относительно одной и той же точки, двухъ, равныхъ между собой, прямо противоположныхъ и приложенныхъ къ одной и той же точкѣ A, векторовъ.

Такимъ образомъ мы видимъ, что

$$\overline{G_0} = \overline{M_A(V_2)},$$

а если назовемъ разстояніе между векторами разсматриваемой нами пары черезъ

$$p,$$

то получимъ, что

$$G_0 = V_2 \,.\, p,$$

что и доказываетъ нашу теорему.

Изъ изложеннаго слѣдуетъ, что главный моментъ пары векторовъ расположенъ по перпендикуляру къ плоскости пары и направленъ такъ, что, ставъ по его направленію между векторами данной пары и посмотрѣвъ въ точку приложенія какого-нибудь изъ нихъ, мы увидимъ его направленнымъ слѣва направо.

Главный моментъ пары векторовъ будемъ называть **осью этой пары**, а разстояніе между векторами данной пары ея **плечемъ**.

Теорема. *Двѣ пары векторовъ взаимно эквивалентны, если ихъ оси геометрически равны между собой.*

Слѣдствіе I. *Пару векторовъ можно какъ угодно перемѣщать въ ея плоскости.*

Слѣдствіе II. *Плоскость пары векторовъ можно перемѣщать въ пространствѣ, оставляя ее параллельной самой себѣ.*

Слѣдствіе III. *Въ каждой парѣ векторовъ можно увеличить или уменьшить векторы въ извѣстное число разъ, уменьшивъ или увеличивъ въ то же число разъ ея плечо.*

Слѣдствіе IV. *Нѣсколько паръ векторовъ эквивалентны одной парѣ, ось которой есть геометрическая сумма осей данныхъ паръ.*

Послѣднее слѣдствіе дастъ возможность нѣсколько паръ векторовъ:

$$(V_1, V_1'); (V_2, V_2'); (V_3, V_3'), \ldots$$

Черт. 18.

(черт. 18) замѣнить одной. Съ этой цѣлью, полагая, что оси данныхъ паръ суть

$$G_1, G_2, G_3, \ldots\ldots,$$

построимъ, при нѣкоторой точкѣ O пространства, векторъ

$$G,$$

удовлетворяющій условію

$$\overline{G} = \overline{G}_1 + \overline{G}_2 + \overline{G}_3 + \ldots\ldots,$$

а затѣмъ—въ плоскости перпендикулярной къ нему—пару векторовъ

$$(V,\ V'),$$

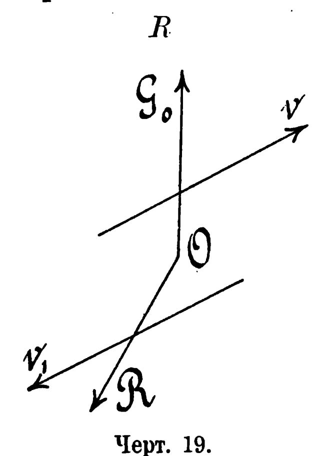
удовлетворяющихъ условію

$$V\,p = G.$$

15. **Теорема.** *Всякая система векторовъ можетъ быть приведена къ одному вектору, равному главному вектору данной системы и приложенному къ какой-нибудь точкѣ пространства и къ парѣ векторовъ, ось которой геометрически равна главному моменту данной системы, относительно выбранной точки.*

Положимъ, что мы имѣемъ нѣкоторую систему векторовъ, главный векторъ которой есть

$$R$$



Черт. 19.

(чер. 19), а главный моментъ относительно точки O приложенія этого вектора

$$G_0$$

Построивъ пару векторовъ

$$(V,\ V_1),$$

ось которой будетъ

$$G_0,$$

мы видимъ, что система трехъ векторовъ

$$R,\ V \text{ и } V_1$$

будетъ эквивалентна разсматриваемой нами системѣ, ибо ея главный векторъ будетъ

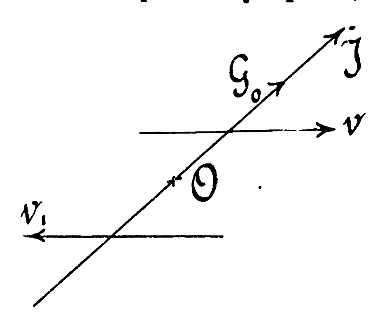
$$R,$$

такъ какъ геометрическая сумма векторовъ пары равняется нулю, а ея главный моментъ относительно точки O будетъ

$$G_0,$$

такъ какъ моментъ вектора R, относительно этой точки, равняется нулю.

Замѣтимъ, что, взявъ точку O на центральной оси разсматривамой нами системы, мы приведемъ ее къ вектору, направленному вдоль этой оси, и къ парѣ векторовъ, плоскость которой будетъ къ ней перпендикулярна (чер. 20), ибо въ



Черт. 20.

этомъ случаѣ и главный моментъ системы, относительно точки O, будетъ лежать на центральной оси.

16. Въ частныхъ случаяхъ можетъ оказаться, что система векторовъ, не эквивалентная нулю, будетъ приводиться или только къ одному вектору, равному ея главному вектору, или только къ одной парѣ, ось которой геометрически равна главному моменту системы относительно любой точки пространства.

Теорема. *Для того, чтобы система векторовъ приводилась только къ одному вектору, необходимо, чтобы ея главный векторъ былъ отличенъ отъ нуля, а ея главный моментъ, относительно какой-нибудь точки ея центральной оси, былъ равенъ нулю.*

Въ самомъ дѣлѣ, если главный моментъ системы, относительно какой-нибудь точки центральной оси, равняется нулю, то пара, ось которой совпадаетъ съ центральной осью, исчезаетъ и система векторовъ приводится только къ ея главному вектору. Обратно, если система векторовъ приводится только къ одному ея главному вектору, т. е. если пара, расположенная въ плоскости перпендикулярной къ центральной оси, исчезаетъ, то главный моментъ системы, относительно точекъ центральной оси, обращается въ нуль.

Замѣтимъ, что если система векторовъ приводится къ одному вектору, то ея главные моменты, относительно всѣхъ точекъ пространства, перпендикулярны къ ея центральной оси, ибо, на основаніи послѣдней изъ теоремъ § 8, проекціи всѣхъ этихъ моментовъ на направленіе центральной оси должны быть равны нулю.

Теорема. *Для того, чтобы система векторовъ приводилась только къ парѣ векторовъ, необходимо и достаточно, чтобы главный векторъ этой системы былъ равенъ нулю, а ея главный моментъ, относительно какой-нибудь точки пространства, былъ отличенъ отъ нуля.*

Въ самомъ дѣлѣ, если главный векторъ системы будетъ равенъ нулю, а ея главный моментъ, относительно какой-нибудь точки пространства, будетъ отличенъ отъ нуля, то система приведется къ парѣ векторовъ, ось которой будетъ геометрически равна главному моменту разсматриваемой системы. Обратно, если система приводится къ парѣ векторовъ, то ея главный векторъ обращается въ нуль, а главный моментъ отличенъ отъ нуля и геометрически равенъ оси разсматриваемой пары.

Принимая во вниманіе все вышеизложенное, мы можемъ, на основаніи разсмотрѣнія инваріантовъ системы векторовъ, сдѣлать относительно нея заключенія, сгруппированныя въ нижеприведенной таблицѣ:

$J_1 = LX + MY + NZ \neq 0$ (слѣд. и $J_2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \neq 0$) — Система приводится къ одному вектору, расположенному по направленію ея центральной оси и къ парѣ векторовъ, лежащей въ плоскости, перпендикулярной къ этой оси.

$J_1 = LX + MY + NZ = 0$:

- $J_2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \neq 0$, $G_0 \perp R$ — Система приводится къ одному вектору (расположенному по напр. центральн. оси).
- $J_2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$:
  - $G_0 \neq 0$ — Система приводится къ парѣ векторовъ.
  - $L = M = N = 0$ — Система эквивалентна нулю.

17. Какъ приложеніе вышеизложенной общей теоріи системы векторовъ, разсмотримъ систему векторовъ, параллельныхъ между собой.

Положимъ, что имѣемъ систему взаимно параллельныхъ векторовъ (чер. 21)

$$V_1, V_2, \ldots\ldots, V_i, \ldots, V_n,$$

при чемъ координаты точки приложенія вектора

$$V_i$$

суть

$$x_i, y_i, z_i,$$

его проекціи на оси координатъ суть

$$X_i\,,\ Y_i\,,\ Z_i$$

и его моменты, относительно координатныхъ осей

$$L_i\,,\ M_i\,,\ N_i\,.$$

Назовемъ главный векторъ разсматриваемой системы черезъ

$$V,$$

его проекціи на оси координатъ черезъ

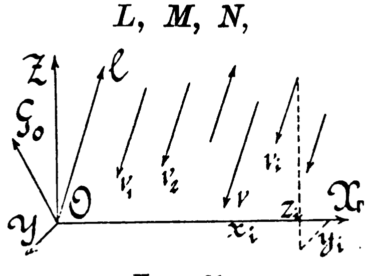
$$X,\ Y,\ Z,$$

главный моментъ этой системы, относительно начала координатъ, черезъ

$$G_0,$$

а его проекціи на оси координатъ черезъ

$$L,\ M,\ N,$$



Черт. 21.

положимъ, что векторы разсматриваемой системы параллельны прямой l, косинусы угловъ, образуемыхъ которой съ осями координатъ, суть

$$\alpha,\ \delta,\ \gamma$$

и условимся считать положительными тѣ векторы нашей системы, которые направлены одинаково съ прямой l, а тѣ, которые направлены въ противоположную сторону,—отрицательными.

Въ такомъ случаѣ мы будемъ имѣть

$$X_i = \alpha V_i\,,\ Y_i = \beta V_i\,,\ Z_i = \gamma V_i$$

$$L_i = V_i\,(y_i\,\gamma - z_i\,\beta)$$

$$M_i = V_i\,(z_i\,\alpha - x_i\,\gamma)$$

$$N_i = V_i\,(x_i\,\beta - y_i\,\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{c} V = \sum\limits_{i=1}^{i=n} V_i \\ X = \alpha \sum\limits_{i=1}^{i=n} V_i\,;\ Y = \beta \sum\limits_{i=1}^{i=n} V_i\,;\ Z = \gamma \sum\limits_{i=1}^{i=n} V_i \\ L = \gamma \sum\limits_{i=1}^{i=n} V_i\,y_i - \beta \sum\limits_{i=1}^{i=n} V_i\,z_i \\ M = \alpha \sum\limits_{i=1}^{i=n} V_i\,z_i - \gamma \sum\limits_{i=1}^{i=n} V_i\,x_i \\ N = \beta \sum\limits_{i=1}^{i=n} V_i\,x_i - \alpha \sum\limits_{i=1}^{i=n} V_i\,y_i \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (21)$$

Теорема. *Для системы параллельныхъ векторовъ, первый инваріантъ*

$$J_1 = XL + YM + ZN$$

равняется нулю.

Справедливость этой теоремы повѣряется, во-первыхъ, непосредственно, на основаніи вышеприведенныхъ формулъ, а во-вторыхъ—она вытекаетъ изъ того, что моментъ каждаго вектора нашей системы, относительно начала координатъ, перпендикуляренъ къ направленію этого вектора, ибо въ такомъ случаѣ мы будемъ имѣть, что

$$G_0 \perp V$$

и слѣдовательно, что

$$LX + MY + NZ = 0.$$

Слѣдствіе. *Система взаимно параллельныхъ векторовъ приводится или къ одному вектору, или къ парѣ векторовъ, или*

эквивалентна нулю, при чемъ первый случай имѣетъ мѣсто, если

$$V \neq 0,$$

второй, если

$$V = 0,$$

а

$$L^2 + M^2 + N^2 \neq 0$$

и третій, когда

$$V = 0,$$

и

$$L = M = N = 0.$$

Изъ изложеннаго слѣдуетъ, что для того, чтобы система взаимно параллельныхъ векторовъ была эквивалентна нулю, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условія:

$$\sum_{i=1}^{i=n} V_i = 0$$

и

$$\frac{\sum_{i=1}^{i=n} V_i\, x_i}{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} V_i\, y_i}{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} V_i\, z_i}{\gamma}.$$

18. Разсмотримъ болѣе подробно систему взаимно параллельныхъ векторовъ, для которой

$$V = \sum_{i=1}^{i=n} V_i = 0.$$

Такая система, какъ мы видѣли, приводится къ одному вектору, расположенному по направленію ея центральной оси.

Приведемъ для разсматриваемаго нами случая уравненіе центральной оси

$$\frac{L - (yZ - zY)}{X} = \frac{M - (zX - xZ)}{Y} = \frac{N - (xY - yX)}{Z}$$

къ обычной формѣ уравненія прямой подъ видомъ пропорцій.

Мы можемъ написать, что

$$\frac{L-(Zy-Yz)}{X}=\frac{M-(Xz-Zx)}{Y}=\frac{N-(Yx-Xy)}{Z}=\frac{LX+MY+NZ}{X^2+Y^2+Z^2},$$

откуда, имѣя въ виду, что, на основаніи предыдущей теоремы, для системы параллельныхъ векторовъ

$$LX+MY+NZ=0,$$

получимъ

$$Zy-Yz-L=0$$

$$Xz-Zx-M=0$$

$$Yx-Xy-N=0$$

и, слѣдовательно, на основаніи формулъ (21), будемъ имѣть

$$\gamma\left(y\sum_{i=1}^{i=n}V_i-\sum_{i=1}^{i=n}V_i y_i\right)-\beta\left(z\sum_{i=1}^{i=n}V_i-\sum_{i=1}^{i=n}V_i z_i\right)=0$$

$$\alpha\left(z\sum_{i=1}^{i=n}V_i-\sum_{i=1}^{i=n}V_i z_i\right)-\gamma\left(x\sum_{i=1}^{i=n}V_i-\sum_{i=1}^{i=n}V_i x_i\right)=0$$

$$\beta\left(x\sum_{i=1}^{i=n}V_i-\sum_{i=1}^{i=n}V_i x_i\right)-\alpha\left(y\sum_{i=1}^{i=n}V_i-\sum_{i=1}^{i=n}V_i y_i\right)=0,$$

откуда

$$\frac{x\sum_{i=1}^{i=n}V_i-\sum_{i=1}^{i=n}V_i\;x_i}{\alpha}=\frac{y\sum_{i=1}^{i=n}V_i-\sum_{i=1}^{i=n}V_i\;y_i}{\beta}=$$

$$=\frac{z\sum_{i=1}^{i=n}V_i-\sum_{i=1}^{i=n}V_i\;z_i}{\gamma}$$

или

$$\frac{x-\xi}{\alpha}=\frac{y-\eta}{\beta}=\frac{z-\zeta}{\gamma}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

гдѣ

$$\xi=\frac{\sum_{i=1}^{i=n}V_i\;x_i}{\sum_{i=1}^{i=n}V_i},\;\eta=\frac{\sum_{i=1}^{i=n}V_i\;y_i}{\sum_{i=1}^{i=n}V_i};\;\zeta=\frac{\sum_{i=1}^{i=n}V_i\;z_i}{\sum_{i=1}^{i=n}V_i}. \quad . \quad . \quad (23)$$

Уравненіе (22) представляетъ уравненіе центральной оси системы параллельныхъ векторовъ, написанное подъ видомъ пропорцій и, слѣдовательно,

$$\xi, \eta, \zeta,$$

опредѣляемыя равенствами (23), суть координаты точки, черезъ которую проходитъ центральная ось.

Разсматривая выраженія этихъ координатъ, мы видимъ, что онѣ не зависятъ отъ

$$\alpha, \beta, \gamma.$$

Такимъ образомъ, если бы мы повернули всѣ векторы разсматриваемой нами системы, сохраняя ихъ точки приложенія, такъ, чтобы онѣ стали параллельны прямой, косинусы угловъ, образуемыхъ которой съ координатными осями, суть

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1,$$

то мы получили бы уравненіе центральной оси для нашей системы подъ видомъ

$$\frac{x-\xi}{\alpha_1} = \frac{y-\eta}{\beta_1} = \frac{z-\zeta}{\gamma_1},$$

гдѣ

$$\xi, \eta, \zeta$$

имѣли бы тѣ же значенія, какъ и въ уравненіяхъ (22) и, слѣдовательно, и въ этомъ случаѣ центральная ось проходила бы черезъ ту же точку съ координатами

$$\xi, \eta, \zeta,$$

какъ и въ предыдущемъ.

Точку, черезъ которую проходитъ центральная ось данной системы параллельныхъ векторовъ, независимо отъ ихъ общаго направленія, мы будемъ называть **центромъ этой системы параллельныхъ векторовъ**.

19. **Моментомъ вектора, относительно плоскости**, мы будемъ называть произведеніе этого вектора на разстояніе его точки приложенія отъ данной плоскости.

Теорема. *Сумма моментовъ, относительно какой-нибудь плоскости, системы параллельныхъ векторовъ равняется моменту, относительно той же плоскости, главнаго вектора данной системы, приложеннаго къ ея центру.*

Такъ какъ любая плоскость въ пространствѣ можетъ быть принята за одну изъ координатныхъ плоскостей, то, нисколько не нарушая общности предложенной теоремы, мы можемъ доказывать ее для координатныхъ плоскостей, что же касается послѣднихъ, то, на основанiи вышеизложеннаго, для нихъ она почти очевидна.

Въ самомъ дѣлѣ, формулы (23) предыдущаго § мы можемъ представить подъ видомъ

$$\xi \sum_{i=1}^{i=n} V_i = \sum_{i=1}^{i=n} V_i x_i$$

$$\eta \sum_{i=1}^{i=n} V_i = \sum_{i=1}^{i=n} V_i y_i$$

$$\zeta \sum_{i=1}^{i=n} V_i = \sum_{i=1}^{i=n} V_i z_i ,$$

разсматривая же эти формулы, мы видимъ, что ихъ правыя части представляютъ изъ себя суммы моментовъ, относительно координатныхъ плоскостей, векторовъ разсматриваемой нами системы, что же касается ихъ лѣвыхъ частей, то онѣ являются моментами, относительно тѣхъ же плоскостей, главнаго вектора нашей системы, приложеннаго къ ея центру.

Кинематика точки.

Глава I.

Заданіе движенія.

20. **Движеніемъ точки** мы будемъ называть ея послѣдовательный и непрерывный переходъ через точки пространства, совершающійся съ теченіемъ времени.

Знать движеніе точки значитъ умѣть указать ея положеніе въ пространствѣ въ любой моментъ времени; для того же, чтобы имѣть возможность сдѣлать это, необходимо знать:

1) **Траекторію** движущейся точки, т. е. ту кривую, которую она описываетъ въ пространствѣ.

2) **Законъ разстояній** или зависимость разстоянія, пройденнаго разсматриваемой точкой, отъ времени:

$$s = F(t).$$

3) **Начало разстояній** или точку на траекторіи, отъ которой мы условимся отсчитывать разстоянія, проходимыя движущейся точкой.

4) **Направленіе положительныхъ разстояній,** и

5) **Начало временъ**, т. е. моментъ, отъ котораго условимся отсчитывать время.

Для того, чтобы, имѣя эти данныя, указать положеніе движущейся точки въ пространствѣ въ нѣкоторый моментъ времени, мы должны вычислить, на сколько единицъ времени, напримѣръ секундъ, данный намъ моментъ отстоитъ отъ

начала времени, и полученное число подставить вмѣсто t въ уравненіе, опредѣляющее законъ разстояній, изъ котораго, въ такомъ случаѣ, мы получимъ соотвѣтственное значеніе s, т. е. разстояніе, пройденное нашей точкой къ заданному моменту времени. Отложивъ это разстояніе въ принятыхъ единицахъ длины, напримѣръ въ сантиметрахъ, отъ точки, принятой за начало разстояній, по траекторіи въ соотвѣтственномъ направленіи, мы получимъ искомое положеніе движущейся точки.

Траекторія можетъ быть задана чертежемъ или уравненіемъ. Точно также законъ разстояній можетъ быть заданъ или уравненіемъ или графически въ прямоугольныхъ координатахъ на плоскости, причемъ въ этомъ случаѣ одна изъ координатныхъ осей, напримѣръ ось абсциссъ, принимается за ось временъ, а другая за ось разстояній.

21. Если мы будемъ разсматривать движеніе точки въ пространствѣ относительно неподвижной прямоугольной системы координатъ, то, для его заданія, достаточно задать координаты движущейся точки въ функціяхъ отъ времени, указавъ при этомъ только начало временъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если координаты движущейся точки заданы въ функціяхъ отъ времени уравненіями

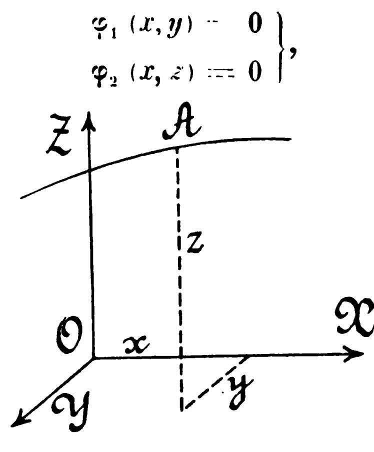
$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

то для того, чтобы найти ея положеніе въ пространствѣ въ какой-нибудь моментъ времени, мы должны опредѣлить, на сколько секундъ данный моментъ отстоитъ отъ начала временъ и подставить найденное число вмѣсто t въ уравненія (1); тогда мы получимъ соотвѣтственныя значенія координатъ разсматриваемой точки, построивъ которыя, найдемъ ея положеніе A (черт. 22) въ пространствѣ въ заданный намъ моментъ времени.

Имѣя выраженія координатъ движущейся точки въ функціяхъ отъ времени, мы можемъ найти уравненія ея траекторіи и законъ разстоянія въ ея движеніи.

Въ самомъ дѣлѣ, исключая изъ уравненій (1) перемѣнную t, мы получимъ систему двухъ уравненій вида

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= 0 \\ \varphi_2(x, z) &= 0 \end{aligned}\right\},$$



Черт. 22.

которыя и представляютъ изъ себя уравненія траекторіи; съ другой стороны, извѣстно, что

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

и, слѣдовательно, имѣя въ виду, что, на основаніи уравненій (1),

$$dx = f_1'(t)\,dt,\ dy = f_2'(t)\,dt,\ dz = f_3'(t)\,dt,$$

мы будемъ имѣть

$$ds = \sqrt{\{f_1'(t)\}^2 + \{f_2'(t)\}^2 + \{f_3'(t)\}^2}\,dt,$$

откуда получимъ

$$s - s_0 = \int_0^t \sqrt{\{f_1'(t)\}^2 + \{f_2'(t)\}^2 + \{f_3'(t)\}^2}\,dt,$$

гдѣ подъ s_0 мы разумѣемъ такъ называемое **начальное разстояніе** движущейся точки, т. е. разстояніе, пройденное ею до начала временъ. Очевидно, что, для знанія закона разстояній, въ разсматриваемомъ случаѣ, надо знать начальное разстояніе.

Обратно, если будутъ заданы законъ разстояній въ движеніи нѣкоторой точки и ея траекторія уравненіями, относительно прямоугольной системы координатныхъ осей въ пространствѣ, то мы найдемъ и ея координаты въ функціяхъ отъ времени.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что законъ разстояній въ движеніи нѣкоторой точки заданъ уравненіемъ

$$s = F(t), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

а ея траекторія, относительно прямоугольной координатной системы, уравненіями

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Имѣя въ виду, что

$$ds = \sqrt{1 + y'^2_x + z'^2_x}\, dx$$

и что, на основаніи уравненій (3), можно найти

$$y'_x \text{ и } z'_x$$

въ функціяхъ отъ x, мы будемъ имѣть

$$ds = \varphi(x)\, dx,$$

гдѣ

$$\varphi(x)$$

есть нѣкоторая опредѣленная функція, и, слѣдовательно, найдемъ, что

$$s - s_0 = \int_0^x \varphi(x)\, dx = \Phi(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

гдѣ s_0 есть начальное разстояніе разсматриваемой нами точки.

Принимая же во вниманіе уравненіе (2), изъ уравненія (4), вообще говоря, найдемъ, что

$$x = f_1(t),$$

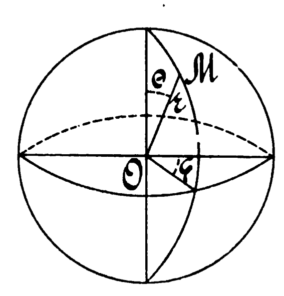
а въ такомъ случаѣ, на основаніи уравненій (3), будемъ имѣть

$$y = f_2(t)$$
$$z = f_3(t).$$

Замѣтимъ, что движеніе точки можетъ быть задано и относительно какихъ-нибудь криволинейныхъ координатъ, напримѣръ относительно полярныхъ координатъ въ пространствѣ, тогда должны быть заданы: радіусъ векторъ r, долгота φ точки и дополненіе ея широты θ въ функціяхъ отъ времени, т. е. должны быть даны уравненія

$$r = f_1(t)$$
$$\varphi = f_2(t)$$
$$\theta = f_3(t),$$

гдѣ f_1, f_2 и f_3 суть нѣкоторыя данныя функціи (черт. 23). Вообще движеніе точки можетъ быть задано посредствомъ заданія какихъ бы то ни было ея координатныхъ параметровъ, т. е. величинъ, опредѣляющихъ ея положеніе въ пространствѣ въ функціяхъ отъ времени.



Черт. 23.

Примѣръ 1. Опредѣлить траекторію и законъ разстояній движенія, заданнаго, относительно прямоугольной координатной системы въ пространствѣ, уравненіями

$$\left.\begin{aligned} x &= a + lt^2 \\ y &= b + mt^2 \\ z &= c + nt^2 \end{aligned}\right\}$$

Уравненіе траекторіи будетъ

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

Законъ разстояній опредѣлится уравненіемъ

$$s=2\int_0^t \sqrt{l^2+m^2+n^2}\; tdt,$$

при условіи, что

$$s_0=0$$

и, слѣдовательно, мы будемъ имѣть

$$s=\sqrt{l^2+m^2+n^2}\; t^2$$

Примѣръ 2. Опредѣлить траекторію и законъ разстояній движенія, заданнаго, относительно прямоугольныхъ координатъ на плоскости, уравненіями

$$x=a\,Sin\,\varphi\,t$$
$$y=b\,Cos\,\varphi\,t.$$

Уравненіе траекторіи будетъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

Черт. 24.

траекторія, слѣдовательно, будетъ эллипсъ, отнесенный къ осямъ симметріи (черт. 24).

Чтобы найти законъ разстояній, воспользуемся формулой

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Имѣя въ виду, что

$$dx = a\varphi \, Cos \, \varphi t \, dt$$

$$dy = - b\varphi \, Sin \, \varphi t \, dt,$$

мы получимъ

$$ds = \varphi \sqrt{a^2 \, Cos^2 \varphi t + b^2 \, Sin^2 \varphi t} \; dt$$

и, слѣдовательно, будемъ имѣть

$$s = \varphi \int_0^t \sqrt{a^2 \, Cos^2 \varphi t + b^2 \, Sin^2 \varphi t} \; dt,$$

въ предположеніи, что, при

$$t = 0,$$

и

$$s = 0,$$

т. е. что въ началѣ временъ движущаяся точка находится въ вершинѣ B эллипса, ибо, при $t = 0$,

$$x = 0 \text{ и } y = b.$$

Преобразуемъ интегралъ, входящій въ выраженіе для s. Мы будемъ имѣть

$$s = a\varphi \int_0^t \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \, Sin^2 \varphi t} \; dt$$

или

$$s = a\varphi \int_0^t \sqrt{1 - e^2 \, Sin^2 \varphi t} \; dt,$$

гдѣ

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}.$$

Имѣя въ виду, что эллиптическій интегралъ Лежандра 2-го рода

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 Sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

гдѣ k есть модуль этого интеграла, мы можемъ написать законъ разстояній разсматриваемаго нами движенія подъ видомъ

$$s = a\,E(\varphi t, e);$$

что касается способа вычисленія s по полученной формулѣ, то онъ указывается въ курсахъ теоріи эллиптическихъ функцій.

Примѣръ 3. Опредѣлить траекторію и законъ разстояній въ движеніи точки, заданномъ, относителено полярной системы координатъ въ пространствѣ, уравненіями

$$r = R$$

$$\theta = \theta_0 + kt$$

$$\varphi = tgn\,\alpha\, lg \left\{ \frac{tng \frac{\theta_0 + kt}{2}}{tng \frac{\theta_0}{2}} \right\},$$

гдѣ

$$R,\ \theta_0,\ k \text{ и } \alpha$$

суть постоянныя величины.

Третье изъ заданныхъ уравненій можетъ быть представлено подъ видомъ

$$e^{\frac{\varphi}{tng\,\alpha}}\, tng\,\frac{\theta_0}{2} = tng\,\frac{\theta_0 + kt}{2},$$

слѣдовательно, уравненія траекторіи будутъ

$$\begin{cases} r = R \\ tng\frac{\theta}{2} = tng\,\frac{\theta_0}{2}\, e^{\frac{\varphi}{tng\,\alpha}}, \end{cases}$$

откуда видно, что траекторіей служитъ кривая, построенная на сферической поверхности радіуса R, для которой φ и θ

связаны послѣднимъ изъ полученныхъ уравненій. Такая кривая извѣстна подъ названіемъ **локсодроміи** и владѣетъ, какъ это мы увидимъ ниже, тѣмъ свойствомъ, что скорость движущейся по ней точки въ каждомъ ея положеніи составляетъ постоянный уголъ съ меридіаномъ, проходящимъ черезъ эту точку.

Что касается закона разстояній въ разсматриваемомъ движеніи, то, имѣя въ виду, что вообще въ полярныхъ координатахъ

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 Sin^2\theta\, d\varphi^2}$$

и что въ нашемъ частномъ случаѣ

$$dr = 0$$

$$d\theta = kdt$$

$$d\varphi = tng\,\alpha \frac{k\frac{dt}{2}}{tng\frac{\theta_0 + kt}{2}\,Cos^2\frac{\theta_0 + kt}{2}} = ktng\,\alpha \frac{dt}{Sin\,(\theta_0 + kt)},$$

мы будемъ имѣть

$$s = \int_0^t \sqrt{R^2 k^2 + R^2 k^2 tng^2\alpha}\; dt = \frac{Rk}{Cos\,\alpha}\int_0^t dt,$$

при условіи, что, при

$$t = 0,$$

и

$$s = 0$$

и, слѣдовательно, получимъ, что

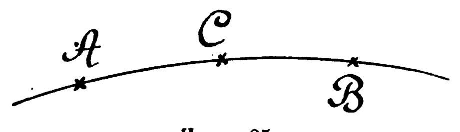
$$s = R\frac{kt}{Cos\,\alpha}.$$

22. При разсмотрѣніи движенія точки, надо отличать **путь**, пройденный этой точкой за данный промежутокъ времени, отъ ея **перемѣщенія**, отвѣчающаго этому промежутку. Подъ вторымъ, т. е. подъ перемѣщеніемъ точки, отвѣчаю-

щимъ данному промежутку времени, мы будемъ разумѣть длину дуги траекторіи между положеніями точки въ начальный и конечный моменты разсматриваемаго промежутка. При этомъ перемѣщеніе точки будемъ считать положительнымъ, если его направленіе, считая отъ начальнаго положенія точки къ конечному, будетъ совпадать съ направленіемъ положительныхъ разстояній, въ противномъ случаѣ перемѣщеніе будемъ считать отрицательнымъ.

Путемъ точки за данный промежутокъ времени будемъ называть разстояніе, пройденное ею по траекторіи за этотъ промежутокъ времени. Очевидно, что путь точки будетъ всегда положительнымъ.

Не трудно видѣть, что въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ перемѣщеніе точки, отвѣчающее данному промежутку времени, и ея путь за этотъ промежутокъ дѣйствительно различаются между собой. Пусть, напримѣръ, за нѣкоторый про-



Черт. 25.

межутокъ времени Δt, движущаяся точка перешла по траекторіи изъ точки A (черт. 25) въ точку B и затѣмъ изъ точки B въ точку C. Въ этомъ случаѣ путь точки за промежутокъ времени Δt будетъ

$$AB + BC,$$

а ея перемѣщеніе, отвѣчающее этому промежутку, будетъ

$$\Delta s = AC,$$

причемъ это перемѣщеніе положительное (на нашемъ чертежѣ стрѣлкою указано направленіе положительныхъ разстояній).

Если, напримѣръ, за данный промежутокъ времени точка перешла изъ положенія A (черт. 25) въ положеніе B, а за-

тѣмъ изъ положенія B опять возвратилась въ положеніе A, то ея перемѣщеніе, отвѣчающее этому промежутку времени, равно нулю, между тѣмъ путь, пройденный ею въ теченіе разсматриваемаго промежутка, будетъ

$$AB + BA = 2AB.$$

Векторомъ перемѣщенія точки за данный промежутокъ времени будемъ называть хорду ея перемѣщенія, отвѣчающаго этому промежутку.

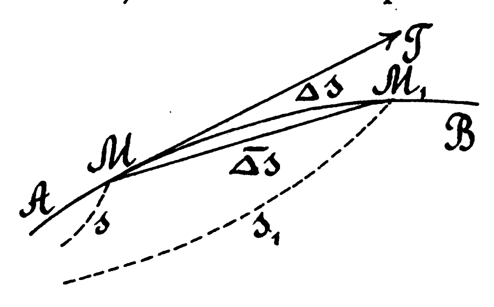
Векторъ перемѣщенія, соотвѣтствующій перемѣщенію Δs, будемъ обозначать символомъ

$$\dot{\Delta} s.$$

Глава II.

О скорости.

23. Положимъ, что нѣкоторая точка движется по траекторіи AB (черт. 26) и въ моментъ времени t находится въ положеніи M на разстояніи s отъ точки, принятой за начало разстояній; положимъ, что въ моментъ времени t_1 она нахо-



Черт. 26.

дится въ положеніи M_1 на разстояніи s_1 отъ начала разстояній, такъ что за промежутокъ времени

$$\Delta t = t_1 - t$$

ея перемѣщеніе по траекторіи есть

$$\Delta s = s_1 - s,$$

а векторъ этого перемѣщенія

$$\overline{MM_1} = \overline{\Delta s}.$$

Средней скоростью точки за данный промежутокъ времени будемъ называть отношеніе ея вектора перемѣщенія за этотъ промежутокъ времени къ самому промежутку и будемъ обозначать ее символомъ

$$v_{cp}$$

Такимъ образомъ, для промежутка времени Δt будемъ имѣть

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Замѣтимъ, что приведенное опредѣленіе средней скорости показываетъ, что для даннаго промежутка времени она направлена по вектору перемѣщенія, отвѣчающему этому промежутку.

Скоростью точки въ данный моментъ будемъ называть предѣлъ ея средней скорости за безконечно-малый промежутокъ времени, прилегающій къ этому моменту, и будемъ обозначать ее символомъ

$$v,$$

т. е. будемъ имѣть, что въ моментъ времени t скорость

$$v = lim\, v_{cp}$$

Теорема. *Скорость точки въ данный моментъ времени равняется отвѣчающему этому моменту значенію производной по времени отъ функціи, выражающей законъ разстояній, и направлена по касательной къ траекторіи въ соотвѣтствующей точкѣ.*

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи даннаго опредѣленія скорости, мы будемъ имѣть, что въ моментъ времени t, когда разсматриваемая нами точка будетъ находиться въ положеніи M (черт. 26), ея скорость будетъ

$$v = lim \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

откуда, имѣя въ виду, что, при отысканіи предѣла отношенія

двухъ безконечно-малыхъ величинъ, каждую изъ нихъ можно замѣнить ей эквивалентной и что безконечно-малая дуга и соотвѣтствующая ей хорда взаимно эквивалентны, получимъ:

$$v = lim \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

или, согласно опредѣленію производной,

$$v = s'_t = \frac{ds}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Что касается направленія скорости, то выраженіе (5) показываетъ, что оно совпадаетъ съ направленіемъ предѣльнаго положенія вектора

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

или, что все равно, вектора

$$\Delta s$$

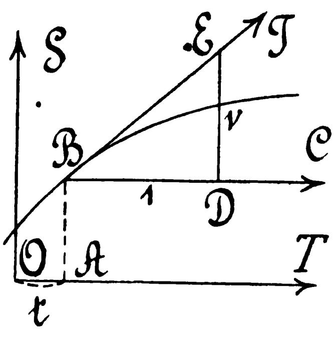
т. е. хорды MM_1, а такъ какъ предѣльное положеніе послѣдней есть касательная MT, то скорость разсматриваемой нами точки, въ моментъ времени t, будетъ направлена по касательной и, слѣдовательно, наша теорема доказана.

На основаніи предыдущей теоремы, мы видимъ, что для того, чтобы, зная движеніе какой-нибудь точки, построить ея скорость въ нѣкоторый моментъ времени, мы должны взять производную по времени отъ функціи, выражающей законъ разстояній, вычислить ея значеніе для даннаго момента, т. е. для соотвѣтственнаго значенія перемѣнной t и полученную величину отложить въ условномъ масштабѣ по касательной къ траекторіи разсматриваемой точки въ соотвѣтственномъ положеніи послѣдней.

24. **Теорема.** *Величина скорости точки въ данный моментъ графически выражается тангенсомъ угла, образуемаго положительнымъ направленіемъ касательной къ графику разстояній, въ соотвѣтственной точкѣ, съ положительнымъ направленіемъ оси временъ.*

Эта теорема является непосредственнымъ слѣдствіемъ того, что вообще на графикѣ функціи ея производная, при данномъ значеніи аргумента, графически выражается тангенсомъ угла, образуемаго положительнымъ направленіемъ касательной къ графику функціи, въ соотвѣтственной точкѣ, съ положительнымъ направленіемъ оси абсциссъ.

На основаніи только что доказанной теоремы, мы можемъ по графику разстояній найти скорость точки въ любой моментъ времени. Съ этой цѣлью, имѣя графикъ разстояній разсматриваемой точки (черт. 27), отложимъ на оси временъ отъ начала координатъ отрѣзокъ OA, численно равный промежутку времени t, отдѣляющему данный моментъ отъ начала



Черт. 27.

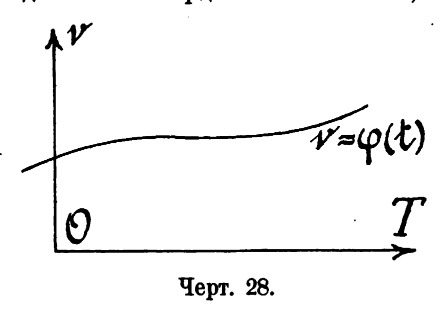
движенія, построимъ затѣмъ соотвѣтственную ординату AB и, въ точкѣ ея пересѣченія съ графикомъ разстояній, касательную BT къ послѣднему; проведемъ, наконецъ, изъ точки B прямую BC, параллельную оси временъ, отложимъ на ней отрѣзокъ BD, равный единицѣ, и изъ точки D возставимъ къ ней перпендикуляръ. Отрѣзокъ DE этого перпендикуляра будетъ численно равенъ скорости разсматриваемой точки въ моментъ времени t.

Замѣтимъ, что, зная скорость точки въ функціи отъ времени,

$$v = \varphi(t),$$

мы можемъ построить, такъ называемый, графикъ скоростей,

т. е. кривую, выражающую зависимость скорости отъ времени, совершенно такъ же, какъ мы строили графикъ разстояній. Въ этомъ случаѣ одна изъ координатныхъ осей, напримѣръ ось



Черт. 28.

абсциссъ, принимается за ось временъ (черт. 28), а другая— за ось скоростей.

25. Чтобы установить единицу скорости, разсмотримъ одинъ частный случай движенія, а именно, такъ называемое, **равномѣрное движеніе**, т. е. такое, во все время котораго скорость остается постоянною.

Въ этомъ случаѣ, значитъ, мы будемъ имѣть

$$v = Const$$

и, слѣдовательно, на основаніи равенства (6), получимъ

$$v = \frac{s - s_0}{t - t_0}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

откуда, полагая, что

$$t - t_0 = 1 \text{ и } s - s_0 = 1,$$

найдемъ, что и

$$v = 1,$$

т. е. будемъ имѣть слѣдующее опредѣленіе единицы скорости.

Единицею скорости называется скорость такого равномѣрнаго движенія, въ которомъ въ единицу времени точка проходитъ разстояніе, равное единицѣ длины.

Приведенное опредѣленіе и равенство (7) показываютъ,

что единица скорости есть сложная единица и что ея символъ есть

$$\frac{L}{T} = LT^{-1};$$

если, напримѣръ, за единицу длины мы примемъ сантиметръ, а за единицу времени секунду, то единицей скорости будетъ сантиметръ, дѣленный на секунду; если за единицу длины примемъ футъ, а за единицу времени секунду, то единицей скорости будетъ футъ, дѣленный на секунду.

Замѣтимъ, что изъ равенства (7) слѣдуетъ, что

$$s = vt + s_0 - vt_0,$$

откуда, полагая

$$s_0 - vt_0 = k,$$

получимъ

$$s = vt + k,$$

гдѣ v и k постоянныя. Такимъ образомъ видимъ, что въ равномѣрномъ движеніи законъ разстояній выражается цѣлой функціей первой степени отъ времени.

26. **Проекціи скорости на оси координатъ.** Положимъ, что движеніе нѣкоторой точки отнесено къ системѣ прямоугольныхъ координатныхъ осей въ пространствѣ и задано, посредствомъ заданія ея координатъ въ функціяхъ отъ времени, уравненіями

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (8)$$

Положимъ, что при этомъ разсматриваемая нами точка движется по траекторіи AB (черт. 29) и что въ нѣкоторый моментъ времени t находится въ положеніи M, а въ моментъ времени

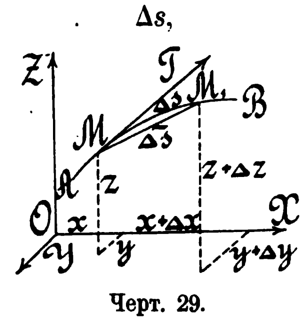
$$t_1 = t + \Delta t$$

въ положеніи M_1, имѣя при этомъ координаты

$$x_1 = x + \Delta x$$
$$y_1 = y + \Delta y$$
$$z_1 = z + \Delta z.$$

Называя перемѣщеніе нашей точки за промежутокъ времени Δt черезъ

$$\Delta s,$$



Черт. 29.

и векторъ этого перемѣщенія черезъ

$$\overline{\Delta s},$$

мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= \overline{\Delta s}\ \ Cos\ (\overline{\Delta s}, x) \\ \Delta y &= \overline{\Delta s}\ \ Cos\ (\overline{\Delta s}, y) \\ \Delta z &= \overline{\Delta s}\ \ Cos\ (\overline{\Delta s}, z) \end{aligned}\right\},$$

откуда, дѣля полученныя равенства на Δt и переходя затѣмъ къ предѣламъ, подводя Δt къ нулю, получимъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v\ Cos\,(v, x) \\ \frac{dy}{dt} &= v\ Cos\,(v, y) \\ \frac{dz}{dt} &= v\ Cos\,(v, z) \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

такъ какъ въ предѣлѣ векторъ Δs стремится къ совпаденію

со скоростью разсматриваемой нами точки въ моментъ времени t.

Выведенныя формулы показываютъ, что проекціи скорости точки на оси координатъ, въ нѣкоторый моментъ времени, равняются значеніямъ производныхъ по времени отъ координатъ движущейся точки въ соотвѣтствующій моментъ.

На основаніи формулъ (9), мы будемъ имѣть

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

гдѣ передъ корнемъ надо брать знакъ плюсъ, ибо онъ выражаетъ длину вектора, изображающаго скорость, что же касается направленія этого вектора, то оно опредѣлится косинусами угловъ, образуемыхъ имъ съ координатными осями, которые будутъ

$$Cos\,(v, x) = \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}$$

$$Cos\,(v, y) = \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}$$

$$Cos\,(v, z) = \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}$$

Принимая во вниманіе уравненія (8), мы получимъ

$$v = \sqrt{\left\{f'_1(t)\right\}^2 + \left\{f'_2(t)\right\}^2 + \left\{f'_3(t)\right\}^2}$$

и, такимъ образомъ, будемъ имѣть формулу, по которой можетъ быть вычислена скорость точки въ любой моментъ времени, когда извѣстны ея координаты въ функціяхъ отъ времени.

Теорема. *Скорость движенія, проектированнаго на неподвижную ось, равняется проекціи на эту ось скорости даннаго движенія.*

Такъ какъ любая прямая въ пространствѣ можетъ быть принята за одну изъ координатныхъ осей, то, нисколько не нарушая общности предложенной теоремы, мы можемъ доказать ее для координатныхъ осей.

По мѣрѣ того, какъ точка движется по своей траекторіи, ея проекціи на оси координатъ движутся вдоль послѣднихъ, причемъ уравненія (8) являются законами разстояній этихъ движеній.

Имѣя же въ виду это замѣчаніе и называя скорости въ движеніяхъ по координатнымъ осямъ соотвѣтственно черезъ

$$v_x, \ v_y, \ v_z,$$

мы будемъ имѣть

$$v_x = f'_1(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = f'_2(t) = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = f'_3(t) = \frac{dz}{dt}$$

и, слѣдовательно, на основаніи уравненій (9), получимъ

$$v_x = v \, Cos\,(v, x)$$

$$v_y = v \, Cos\,(v, y)$$

$$v_z = v \, Cos\,(v, z),$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

Примѣръ 4. Опредѣлить скорость точки въ движеніи, заданномъ, относительно прямоугольныхъ осей въ пространствѣ, уравненіями

$$x = a \, Sin \, \alpha t \, Cos \, \beta t$$

$$y = a \, Sin \, \alpha t \, Sin \, \beta t$$

$$z = a \, Cos \, \alpha t$$

Мы будемъ имѣть

$$v \, Cos\,(v, x) = a\alpha \, Cos\,\alpha t \, Cos\,\beta t - a\beta \, Sin\,\alpha t \, Sin\,\beta t$$

$$v \, Cos\,(v, y) = a\alpha \, Cos\,\alpha t \, Sin\,\beta t + a\beta \, Sin\,\alpha t \, Cos\,\beta t$$

$$v \, Cos\,(v, z) = - a\alpha \, Sin\,\alpha t$$

и, слѣдовательно,

$$v^2 = (a\alpha \, Cos\, \alpha t \, Cos\, \beta t - a\beta \, Sin\, \alpha t \, Sin\, \beta t)^2 +$$
$$+ (a\alpha \, Cos\, \alpha t \, Sin\, \beta t + a\beta \, Sin\, \alpha t \, Cos\, \beta t)^2 + a^2 \alpha^2 \, Sin^2\, \alpha t =$$
$$= a^2 \alpha^2 + a^2 \beta^2 \, Sin^2\, \alpha t,$$

откуда

$$v = a \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \, Sin^2\, \alpha t}$$

и

$$Cos\,(v, x) = \frac{\alpha \, Cos\, \alpha t \, Cos\, \beta t - \beta \, Sin\, \alpha t \, Sin\, \beta t}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \, Sin^2\, \alpha t}}$$

$$Cos\,(v, y) = \frac{\alpha \, Cos\, \alpha t \, Sin\, \beta t + \beta \, Sin\, \alpha t \, Cos\, \beta t}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \, Sin^2\, \alpha t}}$$

$$Cos\,(v, z) = -\frac{\alpha \, Sin\, \alpha t}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \, Sin^2\, \alpha t}}$$

Траекторія разсматриваемаго движенія есть кривая, начерченная на сферической поверхности радіуса a, что видно изъ того, что, возвышая въ квадратъ данныя намъ уравненія и складывая ихъ между собой, мы получимъ

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

что же касается вида этой кривой, то, для его выясненія, перейдемъ къ полярнымъ координатамъ. Извѣстно, что

$$x = r \, Cos\, \varphi \, Sin\, \theta$$
$$y = r \, Sin\, \varphi \, Sin\, \theta$$
$$z = r \, Cos\, \theta,$$

сравнивая же эти уравненія съ данными намъ, получимъ, что

$$\varphi = \beta t$$

и

$$\theta = \alpha t,$$

откуда видно, что, для разсматриваемой нами кривой,

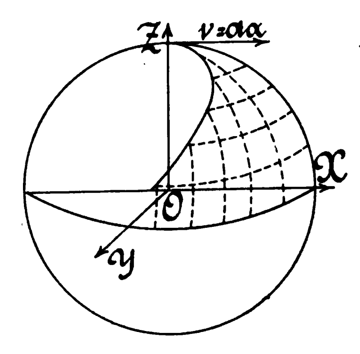
$$\varphi = \frac{\beta}{\alpha} \theta$$

При

$$t = 0,$$

движущаяся точка будетъ находиться въ сѣверномъ полюсѣ (черт. 30), ибо въ этомъ случаѣ

$$\varphi = \theta = 0,$$



Черт. 30.

и будетъ имѣть скорость

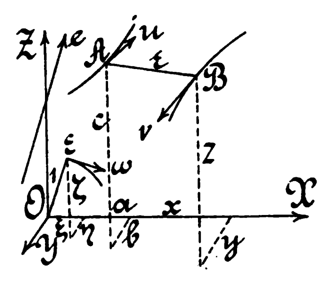
$$v = a\alpha$$

и направленную параллельно оси OX, ибо тогда

$$Cos\,(v, x) = 1;\; Cos\,(v, y) = Cos\,(v, z) = 0.$$

27. **Проекція скорости на подвижное направленіе.** Положимъ, что мы имѣемъ нѣкоторый перемѣнный векторъ

$$\overline{AB} = r$$



Черт. 31.

(черт. 31) начало и конецъ котораго

$$A\ (a,\ b,\ c)$$

и

$$B\,(x,\ y,\ z),$$

двигаясь въ пространствѣ, описываютъ нѣкоторыя траекторіи и имѣютъ соотвѣтственно скорости

$$u$$

и

$$v;$$

положимъ затѣмъ, что нѣкоторая прямая l движется въ пространствѣ, причемъ ея движеніе задано посредствомъ заданія координатъ

$$\xi,\ \eta,\ \zeta$$

точки E, лежащей въ концѣ параллельнаго ей вектора OE, равнаго единицѣ длины и проведеннаго изъ начала координатъ.

Такимъ образомъ, при движеніи прямой l въ пространствѣ, точка E будетъ описывать нѣкоторую траекторію на сферической поверхности радіуса, равнаго единицѣ длины, двигаясь по ней съ нѣкоторою скоростью

$$\omega.$$

Наша задача заключается въ томъ, чтобы найти выраженіе для проекціи скорости v конца вектора r на направленіе прямой l. Съ этой цѣлью напишемъ геометрическое произведеніе

$$\overline{r \cdot OE} = r\, Cos\,(r, l) = (x - a)\,\xi + (y - b)\,\eta + (z - c)\,\zeta$$

и продифференцируемъ послѣднее равенство; мы будемъ имѣть

$$\frac{d\,\{r\, Cos\,(r, l)\}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt} - \frac{da}{dt}\right)\xi + (x - a)\,\frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{db}{dt}\right)\eta + $$
$$+ (y - b)\,\frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dc}{dt}\right)\zeta + (z - c)\,\frac{d\zeta}{dt}$$

или

$$\frac{d\{r\,Cos\,(r,l)\}}{dt}=\frac{dx}{dt}\xi+\frac{dy}{dt}\eta+\frac{dz}{dt}\zeta-\left(\frac{da}{dt}\xi+\frac{db}{dt}\eta+\frac{dc}{dt}\zeta\right)+$$

$$+(x-a)\frac{d\xi}{dt}+(y-b)\frac{d\eta}{dt}+(z-c)\frac{d\zeta}{dt},$$

а такъ какъ

$$\frac{dx}{dt}\xi+\frac{dy}{dt}\eta+\frac{dz}{dt}\zeta=\overline{v\cdot 0E}=v\,Cos\,(v,l)$$

$$\frac{da}{dt}\xi+\frac{db}{dt}\eta+\frac{dc}{dt}\zeta=\overline{u\cdot 0E}=u\,Cos\,(u,l)$$

и

$$(x-a)\frac{d\xi}{dt}+(y-b)\frac{d\eta}{dt}+(z-c)\frac{d\zeta}{dt}=r\omega=r\omega\,Cos\,(r,\omega),$$

то получимъ

$$\frac{d\left\{r\,Cos\,(r,l)\right\}}{dt}=v\,Cos\,(v,l)-u\,Cos\,(u,l)+r\omega\,Cos\,(r,\omega),$$

откуда найдемъ искомое выраженіе для проекціи скорости на подвижное направленіе подъ видомъ

$$v\,Cos\,(v,l)=\frac{d\left\{r\,Cos\,(r,l)\right\}}{dt}+u\,Cos\,(u,l)-r\omega\,Cos\,(r,\omega)\quad.\ (10)$$

Въ частномъ случаѣ, если конецъ A вектора r будетъ неподвиженъ—формула (10) приметъ видъ

$$v\,Cos\,(v,l)=\frac{d\left\{r\,Cos\,(r,l)\right\}}{dt}-r\omega\,Cos\,(r,\omega)$$

Если же, кромѣ того, и ось l будетъ неподвижна, то

$$\omega=0$$

и, слѣдовательно, формула (10) приметъ видъ

$$v\,Cos\,(v,l)=\frac{d\left\{r\,Cos\,(r,l)\right\}}{dt}.$$

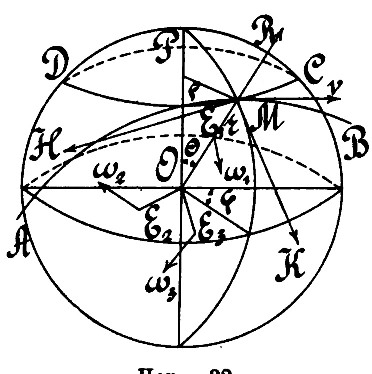
Послѣдняя формула даетъ общее выраженіе для проекціи скорости на неподвижную ось.

28. Какъ приложеніе общей формулы для проекціи скорости на подвижное направленіе, найдемъ проекціи скорости точки на оси полярной системы координатъ въ пространствѣ.

Положимъ, что имѣемъ нѣкоторую точку M (черт. 32), полярныя координаты которой суть

$$r,\ \varphi,\ \theta.$$

Построимъ координатныя линіи этой точки, т. е. направленіе ея радіуса вектора OR, ея меридіанъ PMP_1, и ея параллель CMD, проведемъ въ точкѣ M касательныя MH и



Черт. 32.

MK къ координатнымъ линіямъ и направимъ ихъ въ стороны увеличенія соотвѣтственныхъ координатъ. Прямыя

$$MR,\ MH \text{ и } MK$$

и являются, какъ извѣстно, осями полярной системы координатъ въ точкѣ M.

Полагая, что разсматриваемая нами точка, двигаясь въ пространствѣ по нѣкоторой траекторіи AB, имѣетъ въ положеніи M нѣкоторую скорость v, найдемъ проекціи этой скорости на оси полярной системы координатъ. Имѣя въ виду, что въ нашемъ случаѣ

$$u = O$$

и что радіусъ векторъ r точки M расположенъ по оси MR и, слѣдовательно, перпендикуляренъ къ осямъ

$$MH \text{ и } MK,$$

мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} v\, Cos\,(v, R) &= \frac{dr}{dt} - r\omega_1\, Cos\,(r, \omega_1) \\ v\, Cos\,(v, H) &= - r\omega_2\, Cos\,(r, \omega_2) \\ v\, Cos\,(v, K) &= - r\omega_3\, Cos\,(r, \omega_3) \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad (11)$$

гдѣ

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$$

суть скорости точекъ E_1, E_2 и E_3, лежащихъ въ концахъ векторовъ единичной длины, проведенныхъ изъ точки O и соотвѣтственно параллельныхъ осямъ MR, MH и MK.

Переходя къ выясненію значеній этихъ скоростей, замѣтимъ, что, при перемѣщеніи точки M въ пространствѣ, а слѣдовательно и при измѣненіи положеній, построенныхъ при ней, осей полярной системы координатъ, точки E_1, E_2 и E_3 будутъ перемѣщаться по сферической поверхности единичнаго радіуса, причемъ точка E_2 будетъ все время оставаться на экваторѣ этой сферы, а точки E_1 и E_3 въ каждый моментъ времени будутъ лежать на одномъ и томъ же ея меридіанѣ.

Положимъ, что въ нѣкоторый моментъ времени t упомянутыя точки занимаютъ положенія E_1, E_2 и E_3 (черт. 33) на сферической поверхности, а въ моментъ времени t_1, черезъ промежутокъ времени Δt, положенія E_1', E_2' и E_3'; тогда мы будемъ имѣть

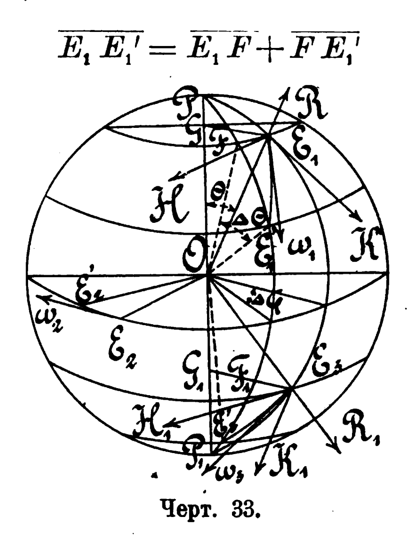
$$\omega_1 = lim\, \frac{\overline{E_1\, E_1'}}{\Delta t}$$

$$\omega_2 = lim\, \frac{\overline{E_2\, E_2'}}{\Delta t}$$

$$\omega_3 = lim\, \frac{\overline{E_3\, E_3'}}{\Delta t}$$

Проведя черезъ точки E_1 и E_1' ихъ меридіаны и параллели, мы видимъ, что,

$$\overline{E_1 E_1'} = \overline{E_1 F} + \overline{F E_1'}$$



Черт. 33.

и, слѣдовательно, можемъ написать, что

$$\omega_1 = \overline{lim \frac{E_1 F}{\Delta t}} + \overline{lim \frac{F E_1'}{\Delta t}},$$

но

$$lim \frac{\overline{E_1 F}}{\Delta t} = lim \frac{\widehat{E_1 F}}{\Delta t} = E_1 G \, lim \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = 0E_1 \, Sin \, \theta \frac{d\varphi}{dt}$$

$$lim \frac{\overline{F E'_1}}{\Delta t} = lim \frac{\widehat{F E_1'}}{\Delta t} = 0F \, lim \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = 0F \frac{d\theta}{dt},$$

а такъ какъ

$$0E_1 = 0F = 1,$$

то

$$\overline{\omega}_1 = \overline{Sin \, \theta \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\theta}{dt}}.$$

Съ другой стороны, въ предѣлѣ хорды $E_1 F$ и FE'_1 совпадаютъ съ осями $E_1 H$ и $E_1 K$ и, слѣдовательно, параллельны осямъ MH и MK, а потому, имѣя въ виду, что

$$\omega_1 \perp R,$$

мы получимъ

$$\omega_1 \, Cos\,(\omega_1, R) = 0; \; \omega_1 \, Cos\,(\omega_1, H) = Sin\,\theta \, \frac{d\varphi}{dt};$$

$$\omega_1 \, Cos\,(\omega_1, K) = \frac{d\theta}{dt}.$$

Далѣе

$$lim \frac{\overline{E_2 E_2'}}{\Delta t} = lim \frac{\widehat{E_2 E_2'}}{\Delta t} = 0E_2 \, lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt},$$

ибо

$$0E_2 = 1;$$

слѣдовательно

$$\omega_2 = \frac{d\varphi}{dt},$$

а такъ какъ

$$\omega_2 \perp MH$$

и параллельна и противоположна по направленію вектору GE_1, то мы будемъ имѣть

$$\omega_2 \, Cos\,(\omega_2, R) = -\,Sin\,\theta \, \frac{d\varphi}{dt}; \; \omega_2 \, Cos\,(\omega_2, H) = 0;$$

$$\omega_2 \, Cos\,(\omega_2, K) = -\,Cos\,\theta \, \frac{d\varphi}{dt}.$$

Наконецъ, такъ какъ

$$\overline{E_3 E_3'} = \overline{E_3 F_1} + \overline{F_1 E_3'},$$

то

$$\omega_3 = \overline{lim \frac{E_3 F_1}{\Delta t}} + \overline{lim \frac{F_1 E_3'}{\Delta t}},$$

но

$$lim \frac{E_3 F_1}{\Delta t} = lim \frac{\widehat{E_3 F_1}}{\Delta t} = E_3 G_1 \, lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} =$$

$$= OE_3 \, Sin \, E_3 \widehat{O} P_1 \frac{d\varphi}{dt} = Cos\,\theta \, \frac{d\varphi}{dt}$$

$$lim \frac{F_1 E_3'}{\Delta t} = lim \frac{\widehat{F_1 E_3'}}{\Delta t} = OE_3' \, lim \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt},$$

ибо

$$0E_3 = 0E_3' = 1,$$

слѣдовательно

$$\omega_3 = Cos\,\theta \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\theta}{dt}.$$

Съ другой стороны, въ предѣлѣ хорда E_3F_1 совпадаетъ по направленію съ осью E_3H_1 и, слѣдовательно, становится параллельной и одинаково направленной съ осью MH, а хорда $F_1'E_3'$ совпадетъ по направленію съ осью E_3K_1 и слѣдовательно становится параллельной и противоположной по направленію съ осью MR (ибо $OE_1 \perp OE_3$), а потому, имѣя въ виду, что

$$\omega_3 \perp MK,$$

мы получимъ

$$\omega_3\,Cos\,(\omega_3, R) = -\frac{d\theta}{dt};\ \omega_3\,Cos\,(\omega_3, H) = Cos\,\theta\,\frac{d\varphi}{dt};$$

$$\omega_3\,Cos\,(\omega_3, K) = 0.$$

Полученные результаты могутъ быть сгруппированы въ слѣдующей таблицѣ:

Проекціи на оси: / Скоростей.	R	H	K
ω_1	0	$Sin\,\theta\,\frac{d\varphi}{dt}$	$\frac{d\theta}{dt}$
ω_2	$-Sin\,\theta\,\frac{d\varphi}{dt}$	0	$-Cos\,\theta\,\frac{d\varphi}{dt}$
ω_3	$-\frac{d\theta}{dt}$	$Cos\,\theta\,\frac{d\varphi}{dt}$	0

. . . (12)

Принимая далѣе во вниманіе, что

$$r\,Cos\,(r, R) = r;\ r\,Cos\,(r, H) = 0;\ r\,Cos\,(r, K) = 0,$$

мы получимъ, что

$$r\omega_1 \; Cos\,(r, \omega_1) = \overline{r\omega_1} = 0$$

$$r\omega_2 \; Cos\,(r, \omega_2) = \overline{r\omega_2} = -\, r \, Sin\, \theta \, \frac{d\varphi}{dt}$$

$$r\omega_3 \; Cos\,(r, \omega_3) = \overline{r\omega_3} = -\, r \, \frac{d\theta}{dt}$$

и, слѣдовательно, на основаніи формулъ (11), будемъ имѣть

$$v \; Cos\,(v, R) = \frac{dr}{dt}$$

$$v \; Cos\,(v, H) = r \, Sin\, \theta \, \frac{d\varphi}{dt}$$

$$v \; Cos\,(v, K) = r \, \frac{d\theta}{dt} \, .$$

Имѣя эти формулы и принимая во вниманіе попарную взаимную перпендикулярность осей

$$OR, \; OH \text{ и } OK,$$

мы получимъ выраженіе для скорости точки въ зависимости отъ ея полярныхъ координатъ подъ видомъ

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \, Sin^2\, \theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

29. Для системы полуполярныхъ координатъ въ пространствѣ, координаты нѣкоторой точки M, какъ извѣстно, суть

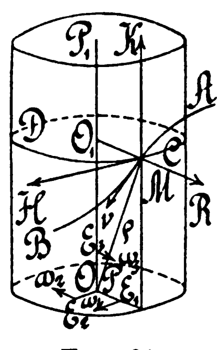
$$r, \; \varphi \text{ и } z$$

(черт. 34). Координатными линіями въ этой точкѣ будутъ: образующая цилиндра, описаннаго около оси PP_1, проходящая черезъ точку M, перпендикуляръ O_1R къ оси упомянутаго цилиндра, проходящій черезъ эту точку, и ея параллель CMD. Осями полуполярной системы въ точкѣ M будутъ касательныя, проведенныя въ этой точкѣ къ координатнымъ линіямъ,

направленныя въ стороны увеличенія соотвѣтственныхъ координатъ, т. е. будутъ оси

$$MR, \; MH \text{ и } MK.$$

Полагая, что нѣкоторая точка, двигаясь въ пространствѣ по траекторіи AB, имѣетъ въ положеніи M скорость v, найдемъ проекціи этой скорости на оси полуполярной системы координатъ.



Черт. 34.

Называя радіусъ векторъ точки M относительно точки P черезъ ρ и имѣя въ виду, что, въ разсматриваемомъ нами случаѣ, скорость

$$u = O,$$

по формулѣ (10), мы будемъ имѣть

$$v \operatorname{Cos}(v, R) = \frac{d\left\{\rho \operatorname{Cos}(\rho, R)\right\}}{dt} - \rho\omega_1 \operatorname{Cos}(\rho, \omega_1)$$

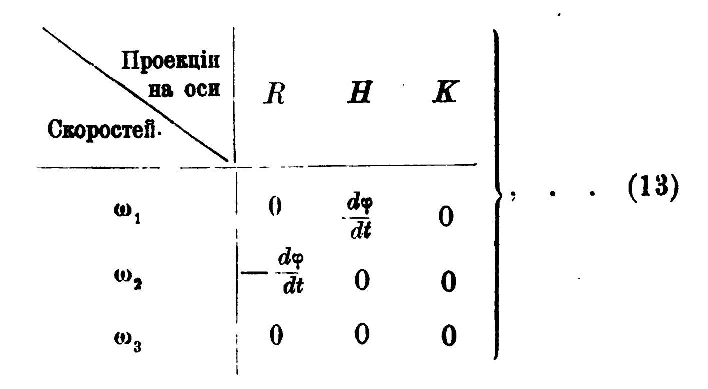
$$v \operatorname{Cos}(v, H) = \frac{d\left\{\rho \operatorname{Cos}(\rho, H)\right\}}{dt} - \rho\omega_2 \operatorname{Cos}(\rho, \omega_2)$$

$$v \operatorname{Cos}(v, K) = \frac{d\left\{\rho \operatorname{Cos}(\rho, K)\right\}}{dt} - \rho\omega_3 \operatorname{Cos}(\rho, \omega_3),$$

откуда, принимая во вниманіе, что

$$\rho \operatorname{Cos}(\rho, R) = r; \; \rho \operatorname{Cos}(\rho, H) = O; \; \rho \operatorname{Cos}(\rho, K) = z,$$

и что



Скоростей \ Проекціи на оси	R	H	K
ω_1	0	$\frac{d\varphi}{dt}$	0
ω_2	$-\frac{d\varphi}{dt}$	0	0
ω_3	0	0	0

$$, \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

мы будемъ имѣть

$$v \, Cos\,(v, R) = \frac{dr}{dt}$$

$$v \, Cos\,(v, H) = r \frac{d\varphi}{dt}$$

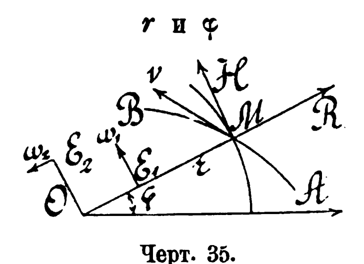
$$v \, Cos\,(v, K) = \frac{dz}{dt},$$

послѣ чего найдемъ выраженіе для скорости точки, въ зависимости отъ ея полуполярныхъ координатъ, подъ видомъ

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

30. Въ системѣ полярныхъ координатъ на плоскости, координатными линіями точки, координаты которой суть

$$r \text{ и } \varphi$$



Черт. 35.

(черт. 35), служатъ направленіе R ея радіуса вектора и окружность, описанная изъ полюса радіусомъ, равнымъ этому

радіусу вектору. Проведя изъ точки M касательную MH къ этой окружности, мы получимъ оси полярной системы координатъ въ точкѣ M

$$MR \text{ и } MH.$$

Полагая, что разсматриваемая нами точка движется по нѣкоторой траекторіи AB и въ положеніи M имѣетъ скорость v, по формулѣ (10), мы будемъ имѣть

$$v \, Cos\,(v, R) = \frac{dr}{dt} - r\omega_1 \, Cos\,(r, \omega_1)$$

$$v \, Cos\,(v, H) = - r\omega_2 \, Cos\,(r, \omega_2),$$

а такъ какъ

$$r\omega_1 \, Cos\,(r, \omega_1) = 0,$$

ибо

$$r \perp \omega_1,$$

и

$$\omega_2 = \frac{d\varphi}{dt},$$

а

$$Cos\,(r, \omega_2) = -1,$$

то получимъ

$$v \, Cos\,(v, R) = \frac{dr}{dt}$$

$$v \, Cos\,(v, H) = r \, \frac{d\varphi}{dt},$$

откуда найдемъ выраженіе для скорости точки, движущейся на плоскости, въ зависимости отъ ея полярныхъ координатъ, подъ видомъ

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}.$$

Примѣръ 5. Найти скорость въ движеніи, заданномъ,

относительно полярной системы координатъ въ пространствѣ, уравненіями

$$r = R$$

$$\theta = \theta_0 + kt$$

$$\varphi = tgn\, \alpha\, lg \left| \frac{tng \frac{\theta_0 + kt}{2}}{tng \frac{\theta_0}{2}} \right|$$

Мы будемъ имѣть

$$\frac{dr}{dt} = 0$$

$$\frac{d\theta}{dt} = k$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{ktng\, \alpha}{Sin\, (\theta_0 + kt)}$$

и слѣдовательно получимъ, что

$$v\, Cos\, (v, R) = 0$$

$$v\, Cos\, (v, H) = Rktng\, \alpha$$

$$v\, Cos\, (v, K) = Rk$$

и что

$$v = kR\, Sec\, \alpha = \frac{kR}{Cos\, \alpha}.$$

Полученные результаты показываютъ намъ, что въ разсматриваемомъ движеніи скорость точки постоянна по величинѣ, а такъ какъ

$$Cos\, (v, H) = \frac{Rktng\, \alpha}{v} = Sin\, \alpha$$

$$Cos\, (v, K) = \frac{Rk}{v} = Cos\, \alpha,$$

то эта скорость, въ каждомъ положеніи движущейся точки, образуетъ постоянный уголъ съ ея меридіаномъ (см. примѣръ 3).

Примѣръ 6. Опредѣлить скорость въ движеніи, заданномъ, относительно полярной системы координатъ на плоскости, уравненіями

$$r = at; \quad \varphi = \frac{2\pi}{T} t.$$

Мы будемъ имѣть

$$\frac{dr}{dt} = a, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T}$$

и, слѣдовательно, получимъ

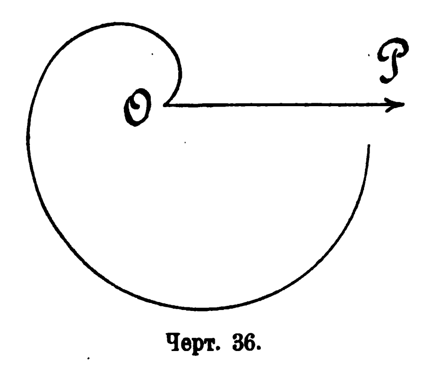
$$v \operatorname{Cos}(v, R) = a$$

$$v \operatorname{Cos}(v, H) = \frac{2\pi a}{T} t,$$

откуда найдемъ, что

$$v = a \sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{T^2} t^2}.$$

Замѣтимъ, что траекторіей, для разсматриваемаго движенія,



Черт. 36.

будетъ Архимедова спираль (черт. 36), уравненіе которой

$$r = \frac{aT}{2\pi} \varphi$$

получится исключеніемъ t изъ данныхъ намъ уравненій.

81. Заданіе движенія, посредствомъ заданія проекцій скорости на координатныя оси въ функціяхъ отъ времени.

Положимъ, что намъ заданы проекціи скорости на координатныя оси уравненіями

$$v_x = \varphi_1(t)$$

$$v_y = \varphi_2(t)$$

$$v_z = \varphi_3(t)$$

На основаніи формулъ (9), мы можемъ написать

$$dx = \varphi_1(t)\,dt$$

$$dy = \varphi_2(t)\,dt$$

$$dz = \varphi_3(t)\,dt,$$

откуда, интегрируя эти равенства въ правыхъ частяхъ отъ нуля до нѣкотораго t, а въ лѣвыхъ по x, y и z въ соотвѣтственныхъ предѣлахъ и полагая, что, при $t=0$, т. е. въ моментъ, отъ котораго мы отсчитываемъ время,

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0,$$

мы будемъ имѣть

$$x - x_0 = \int_0^t \varphi_1(t)\,dt; \quad y - y_0 = \int_0^t \varphi_2(t)\,dt;$$

$$z - z_0 = \int_0^t \varphi_3(t)\,dt.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что, если проекціи скорости точки на три координатныя оси заданы въ функціяхъ отъ времени, то для того, чтобы знать движеніе, т. е. чтобы знать координаты движущейся точки въ функціяхъ отъ времени, надо знать начальныя координаты этой точки, т. е. ея координаты при $t=0$.

Замѣтимъ, что, такъ какъ

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

то въ разсматриваемомъ нами случаѣ, т. е. когда заданы проекціи скорости точки въ функціяхъ отъ времени, законъ разстояній можетъ быть найденъ по формулѣ

$$s = s_0 + \int_0^t \sqrt{\{\varphi_1(t)\}^2 + \{\varphi_2(t)\}^2 + \{\varphi_3(t)\}^2}\, dt,$$

гдѣ s_0 есть начальное разстояніе движущейся точки.

Движеніе можетъ быть задано также посредствомъ заданія закона скоростей, т. е. посредствомъ заданія скорости движущейся точки въ функціи отъ времени.

Въ такомъ случаѣ, имѣя

$$v = \varphi(t)$$

и принимая во вниманіе равенство

$$v = \frac{ds}{dt},$$

мы получимъ

$$ds = \varphi(t)\, dt,$$

откуда, интегрируя въ правой части отъ 0 до t, а въ лѣвой по s въ соотвѣтственныхъ предѣлахъ, найдемъ

$$s - s_0 = \int_0^t \varphi(t)\, dt,$$

гдѣ s_0 есть, такъ называемое, начальное разстояніе разсматриваемой нами движущейся точки, т. е. ея разстояніе отъ точки, принятой за начало разстояній, при $t = 0$.

Изъ изложеннаго видно, что, если движеніе точки задано посредствомъ заданія ея скорости въ функціи отъ времени, то для того, чтобы знать движеніе, надо знать начальное разстояніе точки и всѣ элементы (кромѣ закона разстояній), перечисленные въ § 20, т. е. ея траекторію, начало разстояній, направленіе положительныхъ разстояній и начало временъ.

Примѣръ 7. Опредѣлимъ движеніе точки, заданное, посредствомъ заданія проекціи ея скорости на прямоугольныя оси координатъ въ пространствѣ, уравненіями

$$v_x = \frac{dx}{dt} = k\ Sin\,\alpha t\,Cos\,\beta t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = l\ Sin\,\alpha t\,Sin\,\beta t$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = m\,Cos\,\alpha t,$$

при условіи, что, при $t = 0$,

$$x = y = z = 0$$

т. е. что точка находится въ началѣ координатъ.

Мы будемъ имѣть

$$x = k\int_0^t Sin\,\alpha t\,Cos\,\beta t\,dt =$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^t Sin\,(\alpha+\beta)\,t\,dt + \frac{k}{2}\int_0^t Sin\,(\alpha-\beta)\,t\,dt =$$

$$= \frac{k}{2}\left\{-\Big|_0^t \frac{Cos\,(\alpha+\beta)\,t}{\alpha+\beta} - \Big|_0^t \frac{Cos\,(\alpha-\beta)\,t}{\alpha-\beta}\right\} =$$

$$= \frac{k\alpha}{\alpha^2-\beta^2} - \frac{k}{2}\left\{\frac{Cos\,(\alpha+\beta)\,t}{\alpha+\beta} + \frac{Cos\,(\alpha-\beta)\,t}{\alpha-\beta}\right\}$$

$$y = l\int_0^t Sin\,\alpha\,t\,Sin\,\beta t\,dt =$$

$$= \frac{l}{2}\int^t Cos\,(\alpha-\beta)\,t\cdot dt - \frac{l}{2}\int_0^t Cos\,(\alpha+\beta)\,t\cdot dt =$$

$$= \frac{l}{2}\left\{\Big|_0^t \frac{Sin\,(\alpha-\beta)\,t}{\alpha-\beta} - \Big|_0^t \frac{Sin\,(\alpha+\beta)\,t}{\alpha+\beta}\right\} =$$

$$= \frac{l}{2}\left\{\frac{Sin\,(\alpha-\beta)\,t}{\alpha-\beta} - \frac{Sin\,(\alpha+\beta)\,t}{\alpha+\beta}\right\} =$$

$$z = m\int_0 Cos\,\alpha\,t\cdot dt = m\Big|_0^t \frac{Sin\,\alpha t}{\alpha} = \frac{m\,Sin\,\alpha t}{\alpha}.$$

Разсматриваемое движеніе, слѣдовательно, опредѣляется уравненіями

$$x = \frac{k\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{k}{2}\left\{\frac{Cos\,(\alpha+\beta)\,t}{\alpha+\beta} - \frac{Cos\,(\alpha-\beta)\,t}{\alpha-\beta}\right\}$$

$$y = \frac{l}{2}\left\{\frac{Sin\,(\alpha-\beta)\,t}{\alpha-\beta} - \frac{Sin\,(\alpha+\beta)\,t}{\alpha+\beta}\right\}$$

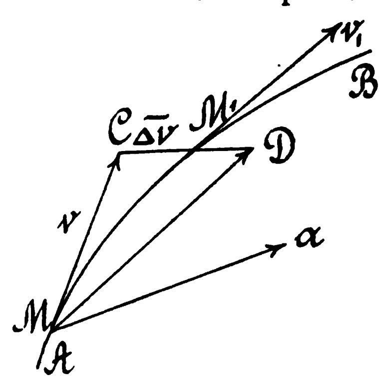
$$z = \frac{m\,Sin\,\alpha t}{\alpha}.$$

Глава III.

Объ ускореніи.

32. Въ предыдущей главѣ мы видѣли, что единственнымъ движеніемъ, во все время котораго скорость остается постоянной, какъ по величинѣ, такъ и по направленію, является равномѣрное и прямолинейное движеніе. Во всякомъ другомъ движеніи скорость непремѣнно измѣняется или по величинѣ, или по направленію, или же, наконецъ, и по величинѣ и по направленію. Для того, чтобы судить объ измѣненіи скорости въ данномъ движеніи, введемъ понятіе о, такъ называемомъ, ускореніи движущейся точки.

Положимъ, что нѣкоторая точка движется по траекторіи AB (черт. 37) и что въ моментъ времени t она находится



Черт. 37.

въ положеніи M и имѣетъ скорость v, а въ моментъ времени t_1 въ положеніи M_1 и имѣетъ скорость v_1.

Пріобрѣтенной скоростью точки за данный промежутокъ времени будемъ называть геометрическую разность скоростей въ концѣ и въ началѣ этого промежутка.

Среднимъ ускореніемъ точки за данный промежутокъ времени будемъ называть отношеніе пріобрѣтенной скорости за этотъ промежутокъ времени къ самому промежутку.

Ускореніемъ точки въ данный моментъ будемъ называть предѣлъ ея средняго ускоренія за безконечно-малый промежутокъ времени, прилегающій къ данному моменту.

Проведемъ изъ точки M (черт. 37) векторъ MD, геометрически равный скорости v, и соединимъ конецъ C скорости v съ точкой D. Обозначая среднее ускореніе за данный промежутокъ времени символомъ a_{cp}, а ускореніе въ данный моментъ буквою a, мы будемъ имѣть, что среднее ускореніе за промежутокъ времени Δt

$$a_{cp} = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

а ускореніе въ моментъ времени t

$$a = lim\, a_{cp} = lim\, \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Если движеніе прямолинейное, то геометрическое приращеніе скорости обращается въ алгебраическое, и мы будемъ имѣть, что въ такомъ случаѣ

$$a = lim\, \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

откуда видимъ, что въ прямолинейномъ движеніи ускореніе является производной отъ скорости по времени и направлено вдоль траекторіи (въ ту или другую сторону, смотря по тому, будетъ ли скорость возрастать или убывать).

33. Чтобы установить единицу ускоренія, разсмотримъ частный случай прямолинейнаго движенія, а именно **равнопеременное** прямолинейное движеніе, при чемъ равнопере-

мѣннымъ прямолинейнымъ движеніемъ будемъ называть такое прямолинейное движеніе, въ которомъ ускореніе остается все время постояннымъ, при чемъ, если оно положительное, то движеніе будемъ называть **равноускореннымъ**, если же отрицательное, то **равнозамедленнымъ**.

Имѣя это опредѣленіе, на основаніи формулы (14), мы видимъ, что въ равноперемѣнномъ и прямолинейномъ движеніи ускореніе

$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

полагая же въ этомъ равенствѣ

$$v - v_0 = 1 \text{ и } t - t_0 = 1,$$

найдемъ, что и

$$a = 1,$$

откуда заключаемъ, что **единица ускоренія** есть ускореніе такого равноускореннаго прямолинейнаго движенія, въ которомъ, въ каждую единицу времени, скорость увеличивается на одну единицу скорости.

Такимъ образомъ видимъ, что единица ускоренія, такъ же, какъ и единица скорости, есть сложная единица и ея символъ можетъ быть изображенъ подъ видомъ

$$\frac{L}{T^2} = LT^{-2};$$

если за единицу длины принять, напримѣръ, сантиметръ, а за единицу времени—секунду, то единица ускоренія будетъ сантиметръ, дѣленный на секунду въ квадратѣ.

Замѣтимъ, что изъ равенства (15) слѣдуетъ, что

$$v = at + v_0 - at_0,$$

откуда, полагая, что

$$v_0 - at_0 = l,$$

получимъ

$$v = at + l,$$

гдѣ a и l постоянныя. Имѣя въ виду, затѣмъ, переходъ отъ закона скоростей къ закону разстояній, мы будемъ имѣть

$$s - s_0 = \int_0^t (at + l)\, dt = \frac{at^2}{2} + lt$$

или, полагая, что

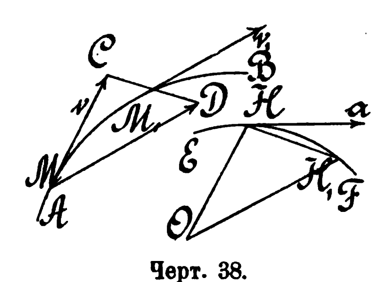
$$\frac{a}{2} = k \text{ и } s_0 = m$$

получимъ

$$s = kt^2 + lt + m$$

и, такимъ образомъ, видимъ, что въ равнопеременномъ движеніи законъ скоростей выражается цѣлой функціей первой степени отъ времени, а законъ разстояній—цѣлой функціей второй степени.

34. **Годографомъ скоростей** даннаго движенія будемъ называть геометрическое мѣсто концовъ векторовъ, проведенныхъ изъ какой-нибудь неподвижной точки пространства и



Черт. 38.

геометрически равныхъ скоростямъ въ этомъ движеніи. Такимъ образомъ, если изъ точки O (черт. 38) проведемъ векторъ OH, геометрически равный скорости v, затѣмъ, векторъ OH_1, геометрически равный скорости v_1 и т. д. будемъ проводить рядъ векторовъ, геометрически равныхъ скоростямъ въ разсматриваемомъ движеніи, то кривая EF — геометрическое мѣсто концовъ, построенныхъ такимъ образомъ векто-

ровъ и будетъ представлять годографъ скоростей разсматриваемаго нами движенія.

Теорема. *Ускореніе въ данномъ движеніи въ данный моментъ времени геометрически равно скорости въ движеніи по годографу скоростей въ соотвѣтственный моментъ.*

Построивъ годографъ скоростей (черт. 38), мы видимъ, что

$$\Delta \bar{v} = \overline{HH_1},$$

дѣля обѣ части послѣдняго равенства на Δt и переходя затѣмъ къ предѣламъ, подводя Δt къ нулю, получимъ

$$\lim \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \lim \frac{\overline{HH_1}}{\Delta t},$$

откуда, имѣя въ виду общее опредѣленіе скорости точки и обозначая скорость въ движеніи по годографу скоростей черезъ v_H, получимъ

$$\bar{a} = \bar{v}_H,$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

Если движеніе точки отнесено къ системѣ прямоугольныхъ координатныхъ осей въ пространствѣ (черт. 39) и если мы будемъ строить годографъ скоростей при началѣ координатъ, то координаты перемѣнной точки на годографѣ будутъ

$$\xi = \frac{dx}{dt}$$

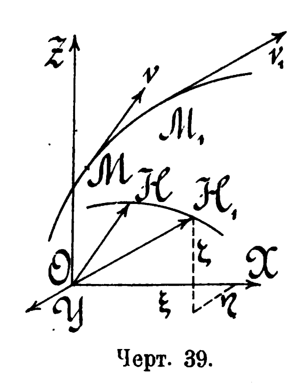
$$\eta = \frac{dy}{dt}$$

$$\zeta = \frac{dz}{dt},$$

такъ какъ, въ такомъ случаѣ, радіусъ векторъ этой точки годографа будетъ геометрически равенъ скорости разсматриваемаго движенія, въ соотвѣтствующей точкѣ, т. е. мы будемъ имѣть

$$\bar{\rho} = \bar{v}.$$

Имѣя въ виду сдѣланное замѣчаніе, мы видимъ, что, если наше движеніе будетъ задано, посредствомъ заданія коорди-



Черт. 39.

натъ движущейся точки въ функціяхъ отъ времени, уравненіями

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t),$$

то, исключивъ t изъ уравненій

$$\xi = f_1'(t)$$

$$\eta = f_2'(t)$$

$$\zeta = f_3'(t),$$

мы получимъ уравненіе годографа скоростей, построеннаго при началѣ координатъ.

Примѣръ 8. Вывести уравненіе годографа скоростей для движенія, заданнаго, относительно прямоугольной системы координатныхъ осей въ пространствѣ, уравненіями

$$x = a\, Sin^2\, \alpha t$$

$$y = b\,(\alpha t - Sin\, \alpha t\, Cos\, \alpha t)$$

$$z = c\, Sin\, \alpha t$$

Обозначая координаты перемѣнной точки годографа скоростей, построеннаго при началѣ координатъ, черезъ

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,$$

мы будемъ имѣть

$$\xi = \frac{dx}{dt} = 2a\alpha \, Sin\, \alpha t \; Cos\, \alpha t$$

$$\eta = \frac{dy}{dt} = b\,\{\alpha - \alpha \, Cos^2 \alpha t + \alpha \, Sin^2 \alpha t\} = 2b\alpha \, Sin^2 \alpha t$$

$$\zeta = \frac{dz}{dt} = c\alpha \, Cos\, \alpha t,$$

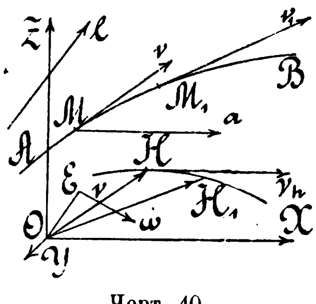
откуда, исключая t, получимъ искомыя уравненія годографа подъ видомъ

$$\frac{\xi^2}{4a^2\alpha^2} + \frac{\eta^2}{4b^2\alpha^2} + \frac{\zeta^2}{c^2\alpha^2} = 1$$

$$\zeta^2 = -\frac{c^2\alpha}{2b}\eta + c^2\alpha^2$$

и такимъ образомъ видимъ, что годографомъ скоростей въ данномъ намъ движеніи является кривая пересѣченія эллипсоида, опредѣляемаго первымъ изъ полученныхъ уравненій и параболическаго цилиндра, опредѣляемаго вторымъ изъ этихъ уравненій.

35. **Проекція ускоренія на подвижное направленіе.** Положимъ, что мы имѣемъ нѣкоторую точку, описывающую



Черт. 40.

траекторію AB (черт. 40) въ пространствѣ и находящуюся въ нѣкоторый моментъ времени t въ положеніи M и имѣющую скорость

$$v$$

и ускореніе

$$a;$$

положимъ, затѣмъ, что нѣкоторая прямая l движется въ пространствѣ, причемъ ея движеніе задано такъ же, какъ въ § 27 предыдущей главы, и постараемся найти проекцію ускоренія a разсматриваемой нами точки на направленіе прямой l. Построивъ при какой-нибудь точкѣ пространства годографъ скоростей разсматриваемаго нами движенія и обозначая скорость въ движеніи по годографу черезъ

$$v_H,$$

по общей формулѣ, для проекціи скорости на подвижное направленіе, мы будемъ имѣть

$$v_H \, Cos\,(v_H, l) = \frac{d\left\{\overline{OH}\, Cos\,(OH, l)\right\}}{dt} - \overline{OH} \quad \omega \, Cos\,(OH, \omega),$$

но такъ какъ

$$\overline{OH} = v$$

и, на основаніи предыдущей теоремы,

$$\bar{v}_H = \bar{a},$$

то мы будемъ имѣть

$$a \, Cos\,(a, l) = \frac{d\left\{v \, Cos\,(v, l)\right\}}{dt} - v\omega \, Cos\,(v, \omega). \quad . \quad . \quad (16)$$

что и представляетъ искомую формулу.

Если прямая l будетъ неподвижна, то

$$\omega = 0$$

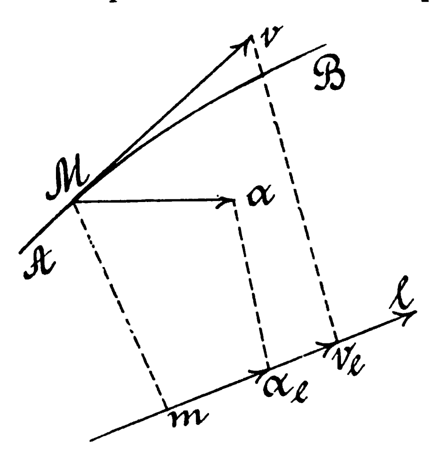
и мы будемъ имѣть выраженіе, для проекціи ускоренія на неподвижную ось, подъ видомъ

$$a \, Cos\,(a, l) = \frac{d\left\{v \, Cos\,(v, l)\right\}}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$



Теорема. *Ускоренiе движенiя, проектированнаго на неподвижную ось, равняется проекцiи на эту ось ускоренiя даннаго движенiя.*

Въ самомъ дѣлѣ, имѣя въ виду теорему, аналогичную доказываемой, для скоростей и называя скорость движенiя



Черт. 41.

по нѣкоторой оси l (черт. 41) проекцiи m на эту ось точки M черезъ

$$v\,,$$

мы будемъ имѣть

$$v_l = v\,Cos\,(v, l),$$

съ другой стороны, движенiе по оси l прямолинейное и, слѣдовательно, называя его ускоренiе черезъ

$$a_l,$$

мы будемъ имѣть

$$a_l = \frac{dv_l}{dt}$$

и такимъ образомъ, на основанiи формулы (17), получимъ

$$a\,Cos\,(a, l) = a_l\,,$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

36. Проекціи ускоренія на оси координатъ. Имѣя въ виду, что

$$v_x = v \, Cos\,(v,x) = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = v \, Cos\,(v,y) = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = v \, Cos\,(v,z) = \frac{dz}{dt},$$

на основаніи формулы (17), мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} a_x &= a \, Cos\,(a,x) = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y &= a \, Cos\,(a,y) = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z &= a \, Cos\,(a,z) = \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

откуда видимъ, что проекціи ускоренія точки на оси координатъ, въ нѣкоторый моментъ времени, равняются значеніямъ вторыхъ производныхъ по времени отъ координатъ движущейся точки въ соотвѣтствующій моментъ.

На основаніи формулъ (18) мы будемъ имѣть

$$a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},$$

гдѣ передъ корнемъ надо брать знакъ плюсъ, ибо онъ выражаетъ длину вектора, изображающаго ускореніе; что же касается направленія этого вектора, то оно опредѣляется косинусами угловъ, образуемыхъ имъ съ координатными осями, которые будутъ

$$Cos\,(a,x) = \frac{\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}.$$

$$Cos\,(a,y) = \frac{\dfrac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}$$

$$Cos\,(a, z) = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}$$

Принимая во вниманіе уравненія (8), мы получимъ

$$a = \sqrt{\{f_1''(t)\}^2 + \{f_2''(t)\}^2 + \{f_3''(t)\}^2}$$

и такимъ образомъ будемъ имѣть формулу, по которой можетъ быть вычислено ускореніе точки въ любой моментъ времени, когда извѣстны ея координаты въ функціяхъ отъ времени.

Примѣръ 9. Найти ускореніе въ движеніи, заданномъ, относительно прямоугольной системы координатныхъ осей въ пространствѣ, уравненіями

$$x = k\ Sin^2 \alpha t$$
$$y = l\ (\alpha t - Sin\,\alpha t\ Cos\,\alpha t)$$
$$z = m\ Sin\,\alpha t$$

Мы будемъ имѣть

$$v_x = \frac{dx}{dt} = k\alpha\ Sin\,2\alpha t$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = 2l\alpha\ Sin^2 \alpha t$$
$$v_z = \frac{dz}{d} = m\alpha\ Cos\,\alpha t$$
$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 2k\alpha^2\ Cos\,2\alpha t$$
$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = 2l\alpha^2\ Sin\,2\alpha t$$
$$a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = -m\alpha^2\ Sin\alpha t$$

и, слѣдовательно, получимъ, что

$$a = \alpha^2 \sqrt{4k^2\ Cos^2 2\alpha t + 4l^2\ Sin^2 2\alpha t + m^2\ Sin^2 \alpha t} =$$
$$= \alpha^2 \sqrt{4k^2 + 4\,(l^2 - k^2)\ Sin^2 2\alpha t + m^2\ Sin^2 \alpha t}$$

и что

$$Cos\,(a, x) = \frac{2k\,Cos\,2\alpha t}{\sqrt{4k^2 + 4\,(l^2 - k^2)\,Sin^2\,2\alpha t + m^2\,Sin^2\,\alpha t}}$$

$$Cos\,(a, y) = \frac{2l\,Sin\,2\alpha t}{\sqrt{4k^2 + 4\,(l^2 - k^2)\,Sin^2\,2\alpha t + m^2\,Sin^2\,\alpha t}}$$

$$Cos\,(a, z) = \frac{-m\,Sin\,\alpha t}{\sqrt{4k^2 + 4\,(l^2 - k^2)\,Sin^2\,2\alpha t + m^2\,Sin^2\,\alpha t}}.$$

Примѣръ 10. Опредѣлить ускореніе въ движеніи, заданномъ, относительно прямоугольной системы координатъ на плоскости, уравненіями

$$x = kt^3$$
$$y = l^2t^2.$$

Мы будемъ имѣть

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3kt^2$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 2l^2t$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 6kt$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = 2l^2$$

и, слѣдовательно, получимъ, что

$$a = \sqrt{36k^2\,t^2 + 4l^4} = 2\sqrt{9k^2\,t^2 + l^4}$$

и что

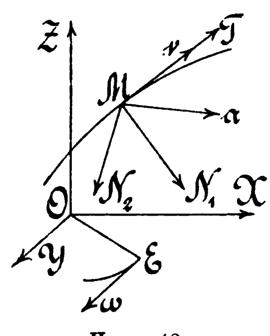
$$Cos\,(a, x) = \frac{3kt}{\sqrt{9k^2\,t^2 + l^4}}$$

$$Cos\,(a, y) = \frac{l^2}{\sqrt{9k^2\,t^2 + l^4}}$$

37. **Теорема.** *Ускореніе точки въ каждый данный моментъ времени есть геометрическая сумма его проекцій на каса-*

тельную и на главную нормаль къ траекторіи, причемъ первая равняется значенію производной отъ скорости по времени въ соотвѣтствующій моментъ, а вторая—квадрату скорости въ этотъ моментъ, раздѣленному на радіусъ кривизны въ соотвѣтствующей точкѣ траекторіи.

Построивъ въ точкѣ M траекторіи, гдѣ движущаяся точка находится въ нѣкоторый моментъ времени t, касательную MT, главную нормаль MN_1 и вторую нормаль MN_2 (черт. 42),



Черт. 42.

называя проекціи ускоренія на эти прямыя соотвѣтственно черезъ

$$a_T, a_{N_1} \text{ и } a_{N_2}$$

и имѣя въ виду, что упомянутыя прямыя попарно взаимно перпендикулярны, мы будемъ имѣть

$$\bar{a} = \bar{a}_T + \bar{a}_{N_1} + \bar{a}_{N_2},$$

и такъ какъ

$$a_{N_2} = 0,$$

ибо ускореніе лежитъ въ плоскости кривизны, что непосредственно слѣдуетъ изъ его опредѣленія, то

$$\bar{a} = \bar{a}_T + \bar{a}_{N_1}$$

и, слѣдовательно, первая часть нашей теоремы доказана.

Чтобы доказать вторую часть предложенной теоремы, т. е. найти величины

$$a_T \text{ и } a_{N_1},$$

воспользуемся формулой (16).

Проектируя ускореніе на касательную и принимая во вниманіе, что въ этомъ случаѣ

$$v \, Cos\,(v, l) = v \, Cos\,(v, T) = v$$

и

$$r\omega \, Cos\,(r, \omega) = 0,$$

такъ какъ

$$r \perp \omega,$$

мы получимъ

$$a_T = a \, Cos\,(a, T) = \frac{dv}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Проектируя ускореніе на главную нормаль и принимая во вниманіе, что въ этомъ случаѣ

$$v \, Cos\,(v, l) = v \, Cos\,(v, N_1) = 0,$$

мы получимъ

$$a_{N_1} = a \, Cos\,(a, N_1) = - v\omega \, Cos\,(v, \omega);$$

для того же, чтобы выяснить значеніе скорости ω въ полученной формулѣ, прежде всего замѣтимъ, что ω параллельна касательной и направлена въ сторону ей противоположную и, слѣдовательно,

$$Cos\,(v, \omega) = -1$$

съ другой стороны

$$\omega = \frac{d\sigma}{dt},$$

гдѣ подъ σ мы разумѣемъ дугу траекторіи, которую точка E описываетъ по сферической поверхности единичнаго радіуса, но въ такомъ случаѣ

$$d\sigma = 1 \cdot d\varphi,$$

гдѣ $d\varphi$ есть уголъ между двумя безконечно близкими положеніями главной нормали траекторіи разсматриваемой нами движущейся точки и, слѣдовательно,

$$d\varphi = \frac{ds}{\rho},$$

если ds есть дифференціалъ дуги этой траекторіи, а ρ ея радіусъ кривизны въ точкѣ M. Такимъ образомъ

$$\omega = \frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho},$$

а слѣдовательно

$$a_{N_1} = \frac{v^2}{\rho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

и наша теорема, значитъ, доказана вполнѣ.

На основаніи только что доказанной теоремы, мы будемъ имѣть, что

$$a = \sqrt{(v'_t)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

т. е. получимъ формулу, по которой будемъ въ состояніи вычислить ускореніе точки въ любой моментъ времени, когда извѣстенъ законъ разстояній ея движенія и ея траекторія.

Замѣтимъ, что, такъ какъ

$$v = \frac{ds}{dt},$$

то формулы (19) и (21) могутъ быть представлены подъ видомъ

$$a_T = a\, Cos\,(a, T) = \frac{d^2s}{dt^2}$$

и

$$a = \sqrt{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}$$

Примѣръ 11. Опредѣлить ускореніе въ движеніи по окружности радіуса R, если законъ разстояній этого движенія заданъ уравненіемъ

$$s = lt^2 + mt + n$$

Мы будемъ имѣть

$$v = \frac{ds}{dt} = 2lt + m$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 2l$$

$$a_{N_1} = \frac{(2lt + m)^2}{R}$$

и слѣдовательно

$$a = \sqrt{4l^2 + \frac{(2lt + m)^4}{R^2}}.$$

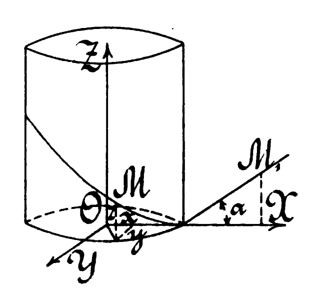
Примѣръ 12. Опредѣлить радіусъ кривизны траекторіи движенія, заданнаго, относительно прямоугольной системы координатъ въ пространствѣ, уравненіями

$$x = r \, Cos \, kt$$

$$y = r \, Sin \, kt$$

$$z = rkt \, tng \, \alpha.$$

Разсматриваемое движеніе, какъ видно изъ данныхъ



Черт. 43.

уравненій, совершается по винтовой линіи, начерченной на круговомъ цилиндрѣ радіуса r и имѣющей крутизну α (чер. 43).

Мы будемъ имѣть

$$v_x = - rk \, Sin \, kt$$

$$v_y = rk \, Cos \, kt$$

$$v_z = rk \, tng \, \alpha.$$

откуда получимъ, что

$$v = rk\sqrt{Sin^2 kt + Cos^2 kt + tng^2 \alpha} = \frac{rk}{Cos\,\alpha}.$$

Такимъ образомъ, разсматриваемое движеніе равномѣрное. Далѣе

$$a_x = -rk^2 \, Cos\, kt$$

$$a_y = -rk^2 \, Sin\, kt$$

$$a_z = 0$$

и слѣдовательно

$$a = rk^2;$$

съ другой стороны

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}} = \frac{r^2 k^2}{\rho\, Cos^2 \alpha}$$

и слѣдовательно

$$rk^2 = \frac{r^2 k^2}{\rho\, Cos^2 \alpha},$$

откуда радіусъ кривизны траекторіи

$$\rho = \frac{r}{Cos^2 \alpha}.$$

38. Выведемъ проекціи ускоренія на оси полярной системы координатъ въ пространствѣ. По формулѣ (16) мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} a\, Cos\,(a, R) &= \frac{d\{v\, Cos\,(v, R)\}}{dt} - v\,\omega_1\, Cos\,(v, \omega_1) \\ a\, Cos\,(a, H) &= \frac{d\{v\, Cos\,(v, H)\}}{dt} - v\,\omega_2\, Cos\,(v, \omega_2) \\ a\, Cos\,(a, K) &= \frac{d\{v\, Cos\,(v, K)\}}{dt} - v\,\omega_3\, Cos\,(v, \omega_3) \end{aligned}\right\} . \quad (22)$$

Первые члены правыхъ частей этихъ формулъ могутъ быть вычислены на основаніи выраженій

$$v\, Cos\,(v, R) = \frac{dr}{dt}$$

$$v\, Cos\,(v, H) = r\, Sin\,\theta \frac{d\varphi}{dt}$$

$$v\, Cos\,(v, K) = r \frac{d\theta}{dt},$$

полученныхъ въ § 28 предыдущей главы, что же касается ихъ вторыхъ членовъ, то, принимая во вниманіе предыдущія формулы и таблицу (12) упомянутаго §, мы можемъ написать, что

$$r\omega_1 \; Cos(r, \omega_1) = r\omega_1 = r\, Sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$r\omega_2 \; Cos(r, \omega_2) = r\omega_2 = -Sin\theta \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} - r\, Cos\theta \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\theta}{dt}$$

$$r\omega_3 \; Cos(r, \omega_3) = r\omega_3 = -\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\, Sin\theta\, Cos\theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

и, слѣдовательно, на основаніи формулъ (22), будемъ имѣть

$$a\, Cos(a, R) = \frac{d^2r}{dt^2} - r Sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$a\, Cos(a, H) = 2\, Sin\theta \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + 2r\, Cos\theta \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\, Sin\theta \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$a\, Cos(a, K) = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} - r Sin\theta\, Cos\theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

или

$$a\, Cos(a, R) = \frac{d^2r}{dt^2} - r\, Sin^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$a\, Cos(a, H) = \frac{1}{r\, Sin\theta} \frac{d\left\{r^2 Sin^2\theta \frac{d\varphi}{dt}\right\}}{dt}$$

$$a\, Cos(a, K) = \frac{1}{r} \frac{d\left\{r^2 \frac{d\theta}{dt}\right\}}{dt} - r\, Sin\theta\, Cos\theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

Имѣя эти формулы, мы можемъ найти ускореніе точки, движеніе которой задано посредствомъ заданія ея полярныхъ координатъ въ функціяхъ отъ времени.

Для полуполярной системы координатъ въ пространствѣ въ § 29 предыдущей главы мы получили результаты, сгруппированные въ слѣдующей таблицѣ.

Скоростей. \ Проекціи на оси.	R	H	K
v	$\frac{dr}{dt}$	$r\frac{d\varphi}{dt}$	$\frac{dz}{dt}$
ω_1	0	$\frac{d\varphi}{dt}$	0
ω_2	$-\frac{d\varphi}{dt}$	0	0
ω_3	0	0	0,

а потому, для проекціи ускоренія точки на оси этой системы, на основаніи формулы (16), будемъ имѣть выраженія

$$a\,Cos\,(a, R) = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$a\,Cos\,(a, H) = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$a\,Cos\,(a, K) = \frac{d^2z}{dt^2}$$

или

$$a\,Cos\,(a, R) = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$a\,Cos\,(a, H) = \frac{1}{r}\cdot\frac{d\left\{r^2\frac{d\varphi}{dt}\right\}}{dt}$$

$$a\,Cos\,(a, K) = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Имѣя эти формулы, мы можемъ найти ускореніе точки, движеніе которой задано въ полуполярныхъ координатахъ.

Въ случаѣ движенія точки, заданнаго въ полярныхъ

координатахъ на плоскости, мы найдемъ проекціи ея ускоренія на оси этихъ координатъ подъ видомъ

$$\left.\begin{aligned} a\,Cos\,(a, R) &= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \\ a\,Cos\,(a, H) &= \frac{1}{r}\,\frac{d\left\{r^2\frac{d\varphi}{dt}\right\}}{dt} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (23)$$

Что касается вывода этихъ формулъ, то онъ подобенъ предыдущему.

Примѣръ 13. Опредѣлить ускореніе въ движеніи, заданномъ, относительно полярной системы координатъ въ пространствѣ, уравненіями

$$r = R$$

$$\theta = \theta_0 + kt$$

$$\varphi = tng\,\alpha\,lg\left\{\frac{tng\,\frac{\theta_0+kt}{2}}{tng\,\frac{\theta_0}{2}}\right\}$$

т. е. въ движеніи по локсодроміи на сферической поверхности.

Имѣя въ виду, что въ разсматриваемомъ случаѣ

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d\theta}{dt} = k, \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{k\,tng\,\alpha}{Sin\,(\theta_0+kt)}, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{k^2\,tng\,\alpha\,Cos\,(\theta_0+kt)}{Sin^2\,(\theta_0+kt)},$$

мы получимъ

$$a\,Cos\,(a, R) = -\frac{Rk^2}{Cos^2\,\alpha}$$

$$a\,Cos\,(a, H) = Rk^2\,tng\,\alpha\,Cotg\,\theta$$

$$a\,Cos\,(a, K) = -Rk^2\,tng^2\alpha\,Cotg\,\theta$$

и такимъ образомъ найдемъ, что

$$a = Rk^2 \sqrt{\frac{1}{Cos^4 \alpha} + (tng^2 \alpha + tng^4 \alpha) Cotng^2 \theta} = \frac{Rk^2}{Cos^2 \alpha} \sqrt{1 + \frac{Sin^2 \alpha}{tng^2(\theta_0 + kt)}}.$$

Замѣтимъ, что имѣя это выраженіе, мы можемъ найти радіусъ кривизны локсодроміи, ибо, принимая во вниманіе, что скорость разсматриваемаго нами движенія

$$v = \frac{kR}{Cos\, \alpha},$$

мы видимъ, что

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$a_N = \frac{k^2 R^2}{\rho\, Cos^2 \alpha},$$

гдѣ ρ есть радіусъ кривизны траекторіи и, слѣдовательно, что ускореніе

$$a = \frac{k^2 R^2}{\rho\, Cos^2 \alpha},$$

имѣя же въ виду найденное выше выраженіе для ускоренія, получимъ выраженіе радіуса кривизны подъ видомъ

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{1 + \frac{Sin^2 \alpha}{tng^2 \theta}}}.$$

39. Разсмотримъ частный случай движенія точки, а именно, когда ея ускореніе направлено по радіусу вектору, т. е. въ неподвижную точку.

Въ такомъ случаѣ

$$a\, Cos\, (a, h) = 0$$

$$a\, Cos\, (a, r) = \pm a,$$

гдѣ двойной знакъ поставленъ въ зависимости отъ направленія ускоренія (по направленію радіуса вектора или въ

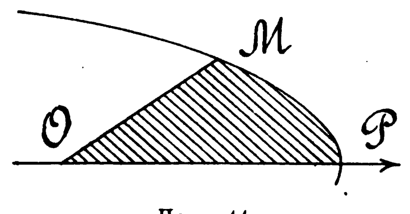
сторону противоположную), слѣдовательно, на основаніи второй изъ формулъ (23),

$$\frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right) = 0,$$

откуда

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = 2C, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

гдѣ C есть постоянная интегрированія. Называя площадь, ограниченную полярной осью, дугой траекторіи и радіусомъ



Черт. 44.

векторомъ, проведеннымъ въ какую-нибудь ея точку (черт. 44), черезъ

$$Q$$

и имѣя въ виду, что

$$dQ = \frac{r^2 d\varphi}{2},$$

мы получимъ, что

$$dQ = Cdt,$$

а слѣдовательно, послѣ интегрированія, въ предположеніи, что, при

$$t = 0,$$

и

$$Q = 0,$$

найдемъ, что

$$Q = Ct,$$

откуда заключаемъ, что, если ускореніе направлено въ неподвижную точку, то площади, описываемыя радіусами век-

торами, пропорціональны временамъ, т. е. получаемъ **второй законъ Кеплера.**

Что же касается первой изъ формулъ (23), то она въ разсматриваемомъ случаѣ приметъ видъ

$$\pm a = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

причемъ, такъ какъ, на основаніи равенства (24),

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2C}{r^2}$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{2C}{r^2} = -2C\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}$$

и

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -2C\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{4C^2}{r^2}\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2},$$

то мы будемъ имѣть

$$\pm a = -\frac{4C^2}{r^2}\left\{\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right\}.$$

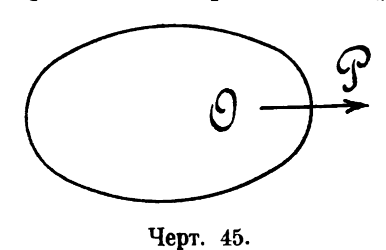
Эта формула, извѣстная подъ названіемъ **формулы Бинэ**, имѣетъ мѣсто, какъ видимъ, когда ускореніе движущейся точки все время направлено въ нѣкоторую неподвижную точку, принятую за полюсъ, и можетъ служить для опредѣленія траекторіи точки, когда извѣстно ея ускореніе, и обратно, для вычисленія ускоренія точки, когда задана ея траекторія.

Примѣръ 14. Опредѣлить величину ускоренія точки, движущейся по эллипсу, при условіи, что это ускореніе направлено въ фокусъ даннаго эллипса.

Въ разсматриваемомъ случаѣ движенія, какъ мы видѣли, имѣетъ мѣсто формула Бинэ

$$\pm a = -\frac{4C^2}{r^2}\left\{\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right\},$$

съ другой стороны, полярное уравненіе эллипса, когда за полюсъ принятъ его фокусъ, а полярная ось совпадаетъ съ осью симметріи, проходящей черезъ этотъ фокусъ, и напра-



Черт. 45.

влена въ сторону ближайшей вершины (черт. 45), имѣетъ видъ

$$r = \frac{p}{1 + e\,Cos\,\varphi};$$

мы будемъ имѣть, слѣдовательно, что

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e\,Cos\,\varphi)$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} = -\frac{e\,Sin\,\varphi}{p}$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{e\,Cos\,\varphi}{p}$$

и такимъ образомъ получимъ, что

$$\pm a = -\frac{4C^2}{r^2 p}\left\{-e\,Cos\,\varphi + 1 + e\,Cos\,\varphi\right\},$$

откуда найдемъ

$$a = \mp\frac{4C^2}{pr^2},$$

гдѣ C есть нѣкоторое постоянное число, а двойной знакъ указываетъ на то, что ускореніе можетъ быть направлено по радіусу вектору траекторіи въ ту или другую сторону.

Примѣръ 15. Опредѣлить траекторію, по которой должна двигаться точка, ускореніе которой направлено въ нѣкоторую

неподвижную точку и обратно пропорціонально квадрату разстоянія движущейся точки до данной неподвижной.

Полагая, что ускореніе

$$a = -\frac{K}{r^2}$$

и имѣя въ виду, что, при условіи нашей задачи, должна имѣть мѣсто формула Бинэ, мы можемъ написать дифференціальное уравненіе траекторіи, разсматриваемой нами точки, подъ видомъ

$$\frac{K}{r^2} = \frac{4C^2}{r^2}\left\{\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right\}$$

или

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} = C_1,$$

гдѣ

$$C_1 = \frac{K}{4C^2}.$$

Общій интегралъ полученнаго дифференціальнаго уравненія будетъ

$$\frac{1}{r} = A\,Cos\,\varphi + B\,Sin\,\varphi + C_1$$

гдѣ A и B суть произвольныя постоянныя. Разсматривая это уравненіе, мы прежде всего видимъ, что оно принадлежитъ кривой второго порядка [1]).

[1]) Ибо, переходя отъ полярной системы координатъ къ прямоугольной, т. е., полагая, что

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$Cos\,\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad Sin\,\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

получимъ

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{Ax}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{By}{\sqrt{x^2+y^2}} + C_1,$$

Для опредѣленія постоянныхъ A, B и C_1, положимъ, вопервыхъ, что данная намъ неподвижная точка находится въ фокусѣ разсматриваемой кривой и что ея ось симметріи совпадаетъ съ полярной осью, тогда

$$B = 0,$$

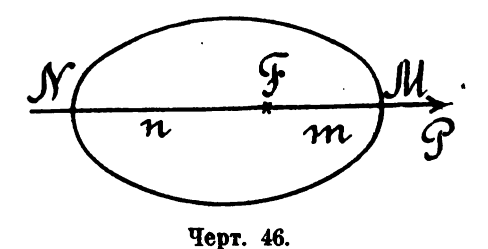
ибо радіусъ векторъ не долженъ измѣнять своей величины, при измѣненіи знака угла φ, т. е. должно имѣть мѣсто уравненіе

$$A \, Cos \, \varphi + B \, Sin \, \varphi + C_1 = A \, Cos \, \varphi - B \, Sin \, \varphi + C_1,$$

откуда

$$B = 0$$

Для опредѣленія постоянныхъ A и C_1, положимъ, что намъ даны вершины M и N разсматриваемой кривой, при-



Черт. 46.

чемъ пусть одна изъ нихъ отстоитъ на разстояніи m, а другая на разстояніи n отъ фокуса (черт. 46).

Въ такомъ случаѣ мы будемъ имѣть уравненія

$$\frac{1}{m} = A + C_1$$

$$\frac{1}{n} = -A + C_1,$$

откуда

$$1 - Ax - By = C_1 \sqrt{x^2 + y^2}$$

или

$$1 + A^2 x^2 + B^2 y^2 - 2 Ax - 2 By + 2 ABxy = C_1^2 x^2 + C_1^2 y^2$$

или же

$$x^2 (A^2 - C_1^2) + y^2 (B^2 - C_1^2) + 2 ABxy - 2 Ax - 2By + 1 = 0.$$

ибо, при

$$r = m,$$

$$\varphi = 0$$

и при

$$r = n,$$

$$\varphi = \pi.$$

Рѣшая полученныя уравненія, найдемъ, что

$$A = \frac{n - m}{2mn} \qquad C_1 = \frac{n + m}{2mn}$$

Уравненіе траекторіи, слѣдовательно, будетъ

$$\frac{1}{r} = \frac{n - m}{2mn} \, Cos\, \varphi + \frac{n + m}{2mn},$$

полагая же, что

$$m + n = 2a$$

$$n - m = 2c$$

и, слѣдовательно, что

$$m = a - c$$

$$n = a + c$$

и

$$mn = a^2 - c^2,$$

мы приведемъ полученное уравненіе къ виду

$$\frac{1}{r} = \frac{c}{b^2} \, Cos\, \varphi + \frac{a}{b^2},$$

гдѣ

$$b^2 = a^2 - c^2,$$

или къ виду

$$r = \frac{b^2}{a + c\, Cos\, \varphi}$$

откуда, полагая, что

$$\frac{b^2}{a} = p \text{ и } \frac{c}{a} = e,$$

окончательно получимъ полярное уравненіе траекторіи подъ видомъ

$$r = \frac{p}{1 + e \, Cos \, \varphi}.$$

При выбранномъ нами расположеніи вершинъ, эта траекторія, слѣдовательно, является эллипсомъ.

40. **Заданіе движенія посредствомъ заданія проекцій ускоренія на координатныя оси** въ функціяхъ отъ времени. Если намъ извѣстны проекціи ускоренія на три координатныя оси въ функціяхъ отъ времени, т. е., если мы имѣемъ

$$a_x = \varphi_1 (t), \; a_y = \varphi_2 (t), \; a_z = \varphi_3 (t),$$

то, имѣя въ виду, что

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt},$$

найдемъ

$$dv_x = \varphi_1 (t) \, dt$$

$$dv_y = \varphi_2 (t) \, dt$$

$$dv_z = \varphi_3 (t) \, dt,$$

откуда, интегрируя эти равенства въ правыхъ частяхъ отъ нуля до нѣкотораго t, а въ лѣвыхъ по v_x, v_y и v_z въ соотвѣтственныхъ предѣлахъ и полагая, что, при $t = 0$,

$$v_x = v_{0,x}; \; v_y = v_{0,y}; \; v_z = v_{0,z},$$

мы будемъ имѣть

$$v_x - v_{0,x} = \int_0^t \varphi_1(t)\,dt$$

$$v_y - v_{0,y} = \int_0^t \varphi_2(t)\,dt$$

$$v_z - v_{0,z} = \int_0^t \varphi_3(t)\,dt$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что, если заданы проекціи ускоренія на три координатныя оси въ функціяхъ отъ времени, то для того, чтобы знать проекціи скорости на тѣ же оси, надо знать ея проекціи на оси при $t = 0$, т. е., такъ называемыя, проекціи начальной скорости; имѣя же въ виду, что, для того, чтобы знать движеніе, когда извѣстны проекціи скорости на координатныя оси, надо знать начальныя координаты движущейся точки, заключаемъ, что если заданы проекціи ускоренія на координатныя оси въ функціяхъ отъ времени, то для того, чтобы знать движеніе, надо знать начальныя координаты движущейся точки и проекціи ея начальной скорости на координатныя оси.

Примѣръ 16. Опредѣлить движеніе точки, заданное, посредствомъ заданія проекцій ея ускоренія на прямоугольныя оси координатъ въ пространствѣ, уравненіями

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = k\alpha\, Cos\, \alpha t\, Cos\, \beta t - k\beta\, Sin\, \alpha t\, Sin\, \beta t$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = l\alpha\, Cos\, \alpha t\, Sin\, \beta t + l\beta\, Sin\, \alpha t\, Cos\, \beta t$$

$$a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = - m\alpha\, Sin\, \alpha t,$$

при условіи, что, при $t = 0$,

$$v_x = v_y = v_z = 0$$

$$x = y = z = 0.$$

Мы будемъ имѣть

$$v_x = \frac{dx}{dt} = k\alpha \int_0^t Cos\,\alpha t\; Cos\,\beta t\, dt - k\beta \int_0^t Sin\,\alpha t\; Sin\,\beta t\, dt =$$

$$= \frac{k\alpha}{2}\left\{\int_0^t Cos\,(\alpha+\beta)\,t\,dt + \int_0^t Cos\,(\alpha-\beta)\,t\,dt\right\} -$$

$$-\frac{k\beta}{2}\left\{\int_0^t Cos\,(\alpha-\beta)\,t\,dt - \int_0^t Cos\,(\alpha+\beta)\,t\,dt\right\} =$$

$$= \frac{k\alpha}{2}\,\frac{Sin\,(\alpha+\beta)\,t}{\alpha+\beta} + \frac{k\alpha}{2}\,\frac{Sin\,(\alpha-\beta)\,t}{\alpha-\beta} - \frac{k\beta}{2}\,\frac{Sin\,(\alpha-\beta)\,t}{\alpha-\beta} + \frac{k\beta}{2}\,\frac{Sin\,(\alpha+\beta)\,t}{\alpha+\beta} =$$

$$= \frac{k}{2}\left\{Sin\,(\alpha+\beta)\,t + Sin\,(\alpha-\beta)\,t\right\}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = l\alpha \int_0^t Cos\,\alpha t\; Sin\,\beta t\, dt + l\beta \int_0^t Sin\,\alpha t\; Cos\,\beta t\, dt =$$

$$= \frac{l\alpha}{2}\left\{\int_0^t Sin\,(\alpha+\beta)\,t\,dt - \int_0^t Sin\,(\alpha-\beta)\,t\,dt\right\} +$$

$$+\frac{l\beta}{2}\left\{\int_0^t Sin\,(\alpha+\beta)\,t\,dt + \int_0^t Sin\,(\alpha-\beta)\,t\,dt\right\} =$$

$$= \frac{l\alpha}{2}\left\{\frac{-2\beta}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{Cos\,(\alpha+\beta)\,t}{\alpha+\beta} + \frac{Cos\,(\alpha-\beta)\,t}{\alpha-\beta}\right\} +$$

$$+\frac{l\beta}{2}\left\{\frac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2} - \frac{Cos\,(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta} - \frac{Cos\,(\alpha-\beta)\,t}{\alpha-\beta}\right\} =$$

$$= -\frac{l}{2}\left\{Cos\,(\alpha+\beta)\,t - Cos\,(\alpha-\beta)\,t\right\}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = -m\alpha \int_0^t Sin\,\alpha t\,dt = m\,Cos\,\alpha t - m.$$

Интегрируя полученные результаты еще разъ, найдемъ (см. примѣръ 7) уравненія, опредѣляющія разсматриваемое движеніе подъ видомъ

$$x = \frac{k\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{k}{2}\left\{\frac{Cos\,(\alpha+\beta)\,t}{\alpha+\beta} - \frac{Cos\,(\alpha-\beta)\,t}{\alpha-\beta}\right\}$$

$$y = \frac{l}{2}\left\{\frac{Sin\,(\alpha-\beta)\,t}{\alpha-\beta} - \frac{Sin\,(\alpha+\beta)\,t}{\alpha+\beta}\right\}$$

$$z = \frac{m}{\alpha}\,Sin\,\alpha t - mt.$$

Кинематика твердаго тѣла.

Глава IV.

Абсолютное, относительное и переносное движеніе точки.

Заданіе движенія твердаго тѣла.

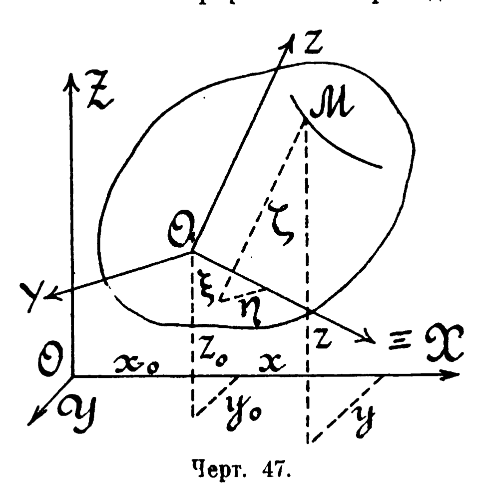
41. Разсматривая движеніе точки, какъ ея послѣдовательный и непрерывный переходъ черезъ точки пространства или, вѣрнѣе, черезъ точки той среды, въ которой оно происходитъ, мы считаемъ эту среду неподвижной. Въ дѣйствительности, въ природѣ невозможно указать среды, находящейся въ абсолютномъ покоѣ: разсматривая движенія, происходящія на земной поверхности, мы относимъ ихъ къ землѣ, считаемой неподвижной; разсматривая движеніе земли и другихъ планетъ солнечной системы, мы относимъ эти движенія къ солнцу, которое считаемъ въ этомъ случаѣ неподвижнымъ и т. д. Въ дѣйствительности земля движется со всѣми, находящимися на ней, предметами, солнце тоже описываетъ нѣкоторое движеніе вмѣстѣ съ его планетной системой.

Въ настоящей главѣ мы будемъ разсматривать движеніе точки относительно нѣкотораго твердаго тѣла, которое, въ свою очередь, перемѣщается въ пространствѣ. Положимъ, что внутри твердаго тѣла (черт. 47) построена нѣкоторая координатная система $O\Xi\Upsilon Z$, неизмѣнно связанная съ нимъ, а движеніе разсматриваемаго твердаго тѣла будемъ относить къ нѣкоторой координатной системѣ

$$OXYZ,$$

построенной въ пространствѣ, которую мы будемъ считать неподвижною. Въ такомъ случаѣ точка *M* будетъ описывать нѣкоторую траекторію внутри разсматриваемаго нами твердаго тѣла и вмѣстѣ съ этимъ тѣломъ будетъ перемѣщаться въ пространствѣ.

Движеніе точки, относительно точекъ твердаго тѣла, т. е. ея послѣдовательный и непрерывный переходъ черезъ точки



Черт. 47.

этого тѣла, мы будемъ называть **относительнымъ движеніемъ** точки; траекторію точки, ея скорость, ускореніе и т. д. въ этомъ движеніи будемъ называть относительной траекторіей, относительными скоростью, ускореніемъ и т. д., координаты точки по отношенію къ координатной системѣ, неизмѣнно связанной съ разсматриваемымъ твердымъ тѣломъ, будемъ называть ея относительными координатами.

Движеніе точки относительно координатной системы, принятой за неподвижную, т. е. послѣдовательный и непрерывный переходъ разсматриваемой точки черезъ точки среды, неизмѣнно связанной съ неподвижной координатной системой, будемъ называть **абсолютнымъ движеніемъ** точки; траекторію точки, ея скорость, ускореніе и т. д. въ этомъ движеніи будемъ называть абсолютной траекторіей, абсолютными ско-

ростью, ускоренiемъ и т. д.; координаты точки относительно координатной системы, принятой за неподвижную, будемъ называть ея абсолютными координатами.

Наконецъ, движенiе относительно неподвижной координатной системы той точки твердаго тѣла, съ которой въ данный моментъ времени совпадаетъ разсматриваемая нами движущаяся точка, будемъ называть **переноснымъ движенiемъ** послѣдней въ этомъ моментѣ времени. Траекторiю этого движенiя, его скорость, ускоренiе и т. д. будемъ называть переносной траекторiей, переносными скоростью, ускоренiемъ и т. д.

42. Чтобы задать относительное движенiе точки, достаточно задать ея относительныя координаты

$$\xi,\ \eta,\ \zeta$$

въ функцiяхъ отъ времени.

Что касается переноснаго движенiя, то для того, чтобы его задать, надо задать движенiе того твердаго тѣла, съ которымъ оно совершается, т. е. надо задать такiя величины, зная которыя, мы могли бы указать въ любой моментъ времени положенiе любой точки разсматриваемаго твердаго тѣла относительно координатной системы

$$OXYZ.$$

Такъ какъ разсматриваемое твердое тѣло неизмѣнно связано съ координатной системой

$$O_1\,\Xi\,\Upsilon\,Z,$$

то, зная положенiе этой послѣдней относительно неподвижной координатной системы, мы будемъ знать и положенiе твердаго тѣла, а слѣдовательно и всѣхъ его точекъ.

Такимъ образомъ, для заданiя переноснаго движенiя,

надо задать величины, опредѣляющія, въ любой моментъ времени, положеніе координатной системы

$$0_1 \Xi \Upsilon Z$$

относительно координатной системы

$$OXYZ,$$

Изъ аналитической геометріи извѣстно, что для заданія положенія одной координатной системы относительно другой, надо задать координаты начала первой системы относительно второй, и девять косинусовъ угловъ, образуемыхъ осями первой системы съ осями второй. Слѣдовательно, если мы зададимъ координаты

$$x_0, \; y_0, \; z_0$$

точки O_1 относительно системы

$$OXYZ,$$

и девять косинусовъ угловъ, указанныхъ въ нижеприведенной таблицѣ

	Ξ	Υ	Z
X	a_1	b_1	c_1
Y	a_2	b_2	c_2
Z	a_3	b_3	c_3

въ функціяхъ отъ времени, то мы будемъ знать движеніе разсматриваемаго нами твердаго тѣла и вмѣстѣ съ тѣмъ переносное движеніе точки M.

43. Сохраняя обозначенія предыдущаго § и обозначая координаты точки M (черт. 48), относительно неподвижной координатной системы, черезъ

$$x_1, \; y_1, \; z_1,$$

по извѣстнымъ формуламъ аналитической геометріи, мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \xi a_1 + \eta b_1 + \zeta c_1 \\ y &= y_0 + \xi a_2 + \eta b_2 + \zeta c_2 \\ z &= z_0 + \xi a_3 + \eta b_3 + \zeta c_3 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Эти формулы, съ одной стороны, опредѣляютъ абсолютное движеніе точки M, выражая ея абсолютныя координаты въ функціяхъ отъ времени, при условіи, что координаты

$$\xi, \ \eta, \ \zeta$$

тоже суть функціи отъ времени, а съ другой опредѣляютъ движеніе точекъ разсматриваемаго нами твердаго тѣла относительно системы

$$OXYZ,$$

если разсматривать координаты

$$\xi, \ \eta, \ \zeta$$

какъ постоянныя величины.

Обратно, имѣя формулы (25), мы будемъ имѣть, что

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (x - x_0)\, a_1 + (y - y_0)\, a_2 + (z - z_0)\, a_3 \\ \eta &= (x - x_0)\, b_1 + (y - y_0)\, b_2 + (z - z_0)\, b_3 \\ \zeta &= (x - x_0)\, c_1 + (y - y_0)\, c_2 + (z - z_0)\, c_3 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25\text{bis})$$

т. е. получимъ формулы, на основаніи которыхъ будемъ имѣть возможность опредѣлить относительное движеніе точки, когда намъ будутъ извѣстны ея абсолютное и переносное движенія.

44. Остановимся нѣсколько на разсмотрѣніи девяти косинусовъ угловъ, опредѣляющихъ положеніе осей подвижной координатной системы относительно осей неподвижной системы.

Прежде всего замѣтимъ, что между разсматриваемыми девятью косинусами существуетъ шесть зависимостей вида

$$\left.\begin{aligned} a_1^2+b_1^2+c_1^2&=1\\ a_2^2+b_2^2+c_2^2&=1\\ a_3^2+b_3^2+c_3^2&=1\\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2&=0\\ a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3&=0\\ a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1&=0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

или же шесть равносильныхъ имъ зависимостей вида

$$\left.\begin{aligned} a_1^2+a_2^2+a_3^2&=1\\ b_1^2+b_2^2+b_3^2&=1\\ c_1^2+c_2^2+c_3^2&=1\\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3&=0\\ b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3&=0\\ c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3&=0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Такимъ образомъ изъ девяти косинусовъ независимыхъ только три и при томъ три такіе, которые не входятъ совмѣстно въ одно и то же изъ равенствъ (26) или (27).

Какъ слѣдствіе изъ приведенныхъ равенствъ, выведемъ еще рядъ зависимостей между разсматриваемыми косинусами, которыя намъ понадобятся въ послѣдующемъ изложеніи.

Возьмемъ съ этой цѣлью четвертое и шестое изъ равенствъ (27), помножимъ первое изъ нихъ на c_3, второе на b_3 и вычтемъ затѣмъ второе изъ перваго; мы будемъ имѣть

$$a_1(b_1c_3-c_1b_3)+a_2(b_2c_3-c_2b_3)=0,$$

откуда

$$\frac{a_1}{b_2c_3-b_3c_2}=\frac{a_2}{b_3c_1-b_1c_3};$$

точно также, исключая изъ выбранныхъ равенствъ

a_2,

получимъ

$$\frac{a_1}{b_2 c_3 - b_3 c_2} = \frac{a_3}{b_1 c_2 - b_2 c_1}$$

и такимъ образомъ будемъ имѣть

$$\frac{a_1}{b_2 c_3 - b_3 c_2} = \frac{a_2}{b_3 c_1 - b_1 c_3} = \frac{a_3}{b_1 c_2 - b_2 c_1},$$

откуда, по извѣстному свойству пропорціи, получимъ

$$\frac{a_1}{b_2 c_3 - b_3 c_2} = \frac{a_2}{b_3 c_1 - b_1 c_3} = \frac{a_3}{b_1 c_2 - b_2 c_1} =$$

$$= \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{\sqrt{(b_2 c_3 - b_3 c_2)^2 + (b_3 c_1 - b_1 c_3)^2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2}},$$

и такъ какъ на основаніи тождества Лагранжа

$$(b_2 c_3 - b_3 c_2)^2 + (b_3 c_1 - b_1 c_3)^2 + b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 =$$

$$= (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\ (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) - (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3)^2,$$

то, принимая во вниманіе равенства (27), мы будемъ имѣть

$$\frac{a_1}{b_2 c_3 - b_3 c_2} = \frac{a_2}{b_3 c_1 - b_1 c_3} = \frac{a_3}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \pm 1 \quad . \quad . \quad (28)$$

По поводу двойного знака въ послѣдней части этихъ равенствъ, замѣтимъ, что, такъ какъ они должны имѣть мѣсто при всякомъ относительномъ расположеніи осей системы

$$O_1\, \Xi Y Z,$$

относительно осей системы

$$OXYZ,$$

и такъ какъ, при соотвѣтственной параллельности этихъ осей,

$$\begin{array}{lll} a_1 = 1 & b_1 = 0 & c_1 = 0 \\ a_2 = 0 & b_2 = 1 & c_2 = 0 \\ a_3 = 0 & b_3 = 0 & c_3 = 1, \end{array}$$

а въ этомъ случаѣ равенства (29) принимаютъ видъ

$$\frac{1}{1} = \pm 1,$$

то изъ двухъ знаковъ, стоящихъ въ ихъ правой части, слѣдуетъ брать плюсъ.

Такимъ образомъ мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = b_2 c_3 - b_3 c_2;\ a_2 = b_3 c_1 - b_1 c_3;\ a_3 = b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ \text{и точно также найдемъ} \\ b_1 = c_2 a_3 - c_3 a_2;\ b_2 = c_3 a_1 - c_1 a_3;\ b_3 = c_1 a_2 - c_2 a_1 \\ c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2;\ c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3;\ c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{array}\right\} . (29)$$

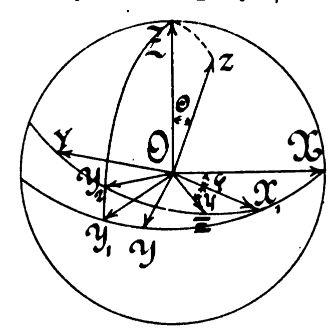
45. Въ предыдущемъ § мы видѣли, что изъ девяти косинусовъ угловъ, опредѣляющихъ положенiе осей подвижной координатной системы относительно осей неподвижной, независимыхъ только три и, слѣдовательно, очевидно, что, вообще говоря, положенiе осей второй системы, относительно осей первой, можетъ быть задано посредствомъ трехъ выбранныхъ соотвѣтственнымъ образомъ независимыхъ параметровъ, въ зависимости отъ которыхъ могутъ быть выражены девять разсматриваемыхъ косинусовъ.

Такими тремя параметрами являются обыкновенно такъ называемые **Эйлеровы углы**, къ указанiю которыхъ и къ выводу зависимостей отъ которыхъ девяти разсматриваемыхъ косинусовъ мы и перейдемъ.

Такъ какъ мы разсматриваемъ лишь относительное положенiе осей подвижной координатной системы по отношенiю къ осямъ неподвижной, то будемъ предполагать начала обѣихъ системъ совмѣщенными въ одной точкѣ O. Опишемъ изъ этой точки (черт. 48) сферическую поверхность произвольнаго радiуса, проведемъ плоскости осей XOY и $\Xi O \Upsilon$ и обозначимъ ихъ линiю пересѣченiя черезъ

$$OX_1$$

Назовемъ, затѣмъ, уголъ, образуемый осью OX съ пря-



Черт. 48.

мой OX_1 черезъ φ, уголъ, образуемый осью $O\Xi$ съ той же прямой, черезъ ψ и уголъ между осями OZ и OZ черезъ θ.

Эти три угла вполнѣ опредѣляютъ положенiе системы

$$O\Xi\Upsilon Z$$

относительно системы

$$OXYZ.$$

Въ самомъ дѣлѣ, повернемъ систему $OXYZ$ около оси OZ на уголъ φ, т. е. такъ, чтобы ось OX совпала съ осью OX_1, причемъ ось OY приметъ положенiе OY_1, затѣмъ повернемъ систему OX_1Y_1Z около оси OX_1 на уголъ θ, т. е. такъ, чтобы ось OZ совпала съ осью OZ, причемъ ось OY_1 придетъ въ плоскость $\Xi O\Upsilon$ и займетъ въ ней нѣкоторое положенiе OY_2 и, наконецъ, повернемъ систему OX_1Y_2Z около оси OZ на уголъ ψ, т. е. такъ, чтобы OX_1 совпала съ осью $O\Xi$, вслѣдствiе чего и ось OY_2 совмѣстится съ осью $O\Upsilon$. Мы видимъ, такимъ образомъ, что тремя вышеописанными поворотами система $OXYZ$ приводится въ совпаденiе съ системою $O\Xi\Upsilon Z$ и, слѣдовательно, зная вышеуказанные углы, которые и извѣстны подъ названiемъ трехъ Эйлеровыхъ угловъ, мы будемъ знать относительное положенiе осей разсматриваемыхъ нами координатныхъ системъ.

Для того, чтобы вывести выраженія девяти косинусовъ угловъ, опредѣляющихъ взаимное положеніе осей подвижной и неподвижной координатныхъ системъ, въ зависимости отъ Эйлеровыхъ угловъ, прослѣдимъ связь между координатами какой-нибудь точки, какъ относительно разсматриваемыхъ нами координатныхъ системъ, такъ и относительно координатныхъ системъ промежуточныхъ, являющихся въ результатѣ каждаго изъ вышеописанныхъ поворотовъ. Съ этой цѣлью обозначимъ координаты нѣкоторой точки M, относительно вышеупомянутыхъ системъ, какъ указано въ нижеприведенной таблицѣ

Относительно системъ.	Координаты точки M.
$OXYZ$	x, y, z
OX_1Y_1Z	x_1, y_1, z_1
OX_1Y_2Z	x_2, y_2, z_2
$O\Xi\Upsilon Z$	ξ, η, ζ

При первомъ поворотѣ, т. е. при переходѣ отъ координатной системы $OXYZ$ къ системѣ $OX_1Y_1Z_1$, ось OZ остается неизмѣнной, слѣдовательно, превышеніе точки M не мѣняется, а такъ какъ новыя оси OX_1 и OY_1 образуютъ со старыми осями OX и OY уголъ φ, то, по извѣстнымъ формуламъ аналитической геометріи, мы будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 \, Cos\,\varphi - y_1 \, Sin\,\varphi \\ y &= x_1 \, Sin\,\varphi + y_1 \, Cos\,\varphi \\ z &= z_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

точно также, при второмъ поворотѣ, т. е. при переходѣ отъ координатной системы OX_1Y_1Z къ системѣ OX_1Y_2Z, получимъ

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ y_1 &= y_2 \, Cos\,\theta - z_2 \, Sin\,\theta \\ z_1 &= y_2 \, Sin\,\theta + z_2 \, Cos\,\theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

и, наконецъ, при третьемъ поворотѣ, т. е. при переходѣ отъ системы OX_1Y_2Z къ системѣ $O\Xi\Upsilon Z$, найдемъ

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \xi \, Cos\, \psi - \eta \, Sin\, \psi \\ y_2 &= \xi \, Sin\, \psi + \eta \, Cos\, \psi \\ z_2 &= \zeta \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (32)$$

Подставляя послѣдовательно величины, опредѣляемыя формулами (32), въ формулы (31), а величины, опредѣляемыя послѣдними, въ формулы (30), мы будемъ имѣть

$$\begin{aligned} x &= (\xi \, Cos\psi - \eta \, Sin\, \psi)\, Cos\, \varphi - [(\xi \, Sin\, \psi + \\ &\quad + \eta \, Cos\, \psi)\, Cos\, \theta - \zeta \, Sin\, \theta]\, Sin\, \varphi \\ y &= (\xi \, Cos\, \psi - \eta \, Sin\, \psi)\, Sin\, \varphi + [(\xi \, Sin\, \psi + \\ &\quad + \eta \, Cos\, \psi)\, Cos\, \theta - \zeta \, Sin\, \theta]\, Cos\, \varphi \\ z &= (\xi \, Sin\, \psi + \eta \, Cos\, \psi)\, Sin\, \theta + \zeta \, Cos\, \theta \end{aligned}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi \, (Cos\, \varphi \, Cos\, \psi - Sin\, \varphi \, Sin\, \psi \, Cos\, \theta) - \eta \, (Cos\, \varphi \, Sin\, \psi + \\ &\quad + Sin\, \varphi \, Cos\, \psi \, Cos\, \theta) + \zeta \, Sin\, \varphi \, Sin\, \theta \\ y &= \xi \, (Sin\, \varphi \, Cos\, \psi + Cos\, \varphi \, Sin\, \psi \, Cos\, \theta) - \eta \, (Sin\, \varphi \, Sin\, \psi - \\ &\quad - Cos\, \varphi \, Cos\, \psi \, Cos\, \theta) - \zeta \, Cos\, \varphi \, Sin\, \theta \\ z &= \xi \, Sin\, \psi \, Sin\, \theta + \eta \, Cos\, \psi \, Sin\, \theta + \zeta \, Cos\, \theta \end{aligned}\right\} . \; (33)$$

Сравнивая же эти формулы съ формулами (25) въ предположеніи, что

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

т. е. съ формулами

$$\begin{aligned} x &= \xi a_1 + \eta b_1 + \zeta c_1 \\ y &= \xi a_2 + \eta b_2 + \zeta c_2 \\ z &= \xi a_3 + \eta b_3 + \zeta c_3, \end{aligned}$$

мы получимъ выраженіе девяти косинусовъ въ зависимости отъ Эйлеровыхъ угловъ или, какъ часто говорятъ, формулы Эйлера для девяти косинусовъ, опредѣляющихъ относительное

положеніе осей подвижной и неподвижной координатныхъ системъ, подъ видомъ

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= Cos\,\varphi\, Cos\,\psi - Sin\,\varphi\, Sin\,\psi\, Cos\,\theta \\
b_1 &= -\,Cos\,\varphi\, Sin\,\psi - Sin\,\varphi\, Cos\,\psi\, Cos\,\theta \\
c_1 &= Sin\,\varphi\, Sin\,\theta \\
a_2 &= Sin\,\varphi\, Cos\,\psi + Cos\,\varphi\, Sin\,\psi\, Cos\,\theta \\
b_2 &= -\,Sin\,\varphi\, Sin\,\psi + Cos\,\varphi\, Cos\,\psi\, Cos\,\theta \\
c_2 &= -\,Cos\,\varphi\, Sin\,\theta \\
a_3 &= Sin\,\psi\, Sin\,\theta \\
b_3 &= Cos\,\psi\, Sin\,\theta \\
c_3 &= Cos\,\theta
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (34)$$

На основаніи изложеннаго, мы видимъ, что движеніе твердаго тѣла, относительно неподвижной координатной системы, можетъ быть задано посредствомъ заданія координатъ

$$x_0,\ y_0,\ z_0$$

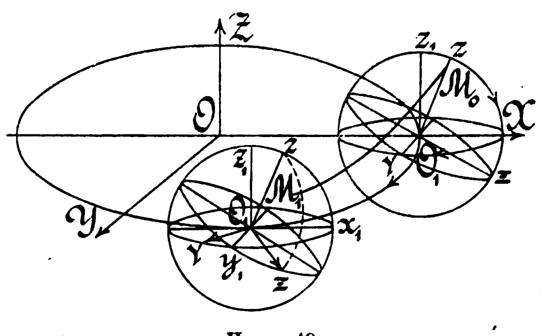
начала системы, неизмѣнно связанной съ этимъ твердымъ тѣломъ, и трехъ Эйлеровыхъ угловъ

$$\varphi,\ \psi,\ \theta$$

въ функціяхъ отъ времени.

Примѣръ 17. Опредѣлить абсолютное движеніе точки, движущейся равномѣрно по меридіану сферической поверхности, предполагая, что центръ этой поверхности O (черт. 49) движется равномѣрно по окружности, описанной около нѣкоторой неподвижной точки O и что сферическая поверхность равномѣрно вращается около оси, остающейся все время параллельной самой себѣ, и при условіяхъ, что въ началѣ движенія движущаяся точка находится въ сѣверномъ полюсѣ сферы, по которой она движется, а ось вращенія этой сферы находится въ одной плоскости съ перпендикуляромъ къ плоскости траекторіи ея центра, возстановленнымъ изъ точки O.

Помѣстимъ начало неподвижной координатной системы въ точкѣ O, ось OX направимъ въ центръ движущейся сферы въ ея начальномъ положеніи, отъ OZ по перпендикуляру къ



Черт. 49.

плоскости траекторіи точки O_1, а OY по перпендикуляру къ плоскости ZOX. Координатную систему

$$O_1\Xi\Upsilon Z$$

выберемъ такъ, чтобы ось O_1Z совпадала съ осью вращенія сферы и чтобы $O_1\Xi$ въ начальномъ положеніи этой сферы лежала въ плоскости ZOX и положимъ, что разсматриваемыя вращенія совершаются въ направленіяхъ, указанныхъ на чертежѣ соотвѣтствующими стрѣлками.

Въ такомъ случаѣ, полагая, что въ равномѣрномъ движеніи по меридіану сферы точка M въ единицу времени проходитъ дугу, отвѣчающую центральному углу λ, и называя радіусъ сферы черезъ ρ_1, мы видимъ, что относительныя координаты точки M будутъ

$$\xi = \rho_1 \, Sin \lambda t$$

$$\eta = 0$$

$$\zeta = \rho_1 \, Cos \lambda t.$$

Полагая затѣмъ, что въ равномѣрномъ движеніи по окружности радіуса ρ, точки O_1, въ единицу времени описы-

ваетъ дугу, отвѣчающую центральному углу μ, получимъ координаты точки O_1 подъ видомъ

$$x_0 = \rho \, Cos \, \mu t$$
$$y_0 = \rho \, Sin \, \mu t$$
$$z_0 = 0$$

Если затѣмъ построимъ при точкѣ O координатную систему осей

$$O_1 \; X_1 \; Y_1 \; Z_1,$$

соотвѣтственно параллельныхъ осямъ системы

$$O \; X \; Y \; Z,$$

то, принимая во вниманіе, что согласно условіямъ разсматриваемаго примѣра, $O_1 Z$ все время остается параллельной самой себѣ и что, слѣдовательно, плоскости $X_1 \, O_1 \, Y_1$ и $\Xi \, O_1 \, \Upsilon$ во все время движенія пересѣкаются по оси $O_1 \, Y_1$ и называя уголъ, подъ которымъ $O_1 Z$ наклонена къ оси OZ чрезъ α, а уголъ, на который поворачивается сферическая поверхность въ единицу времени, въ равномѣрномъ вращеніи около ея оси, черезъ ν, мы видимъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ Эйлеровы углы будутъ

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \;\; \psi = \frac{\pi}{2} - \nu t, \;\; \theta = \alpha.$$

Имѣя въ виду эти данныя, мы найдемъ девять косинусовъ, опредѣляющихъ положеніе осей подвижной координатной системы относительно неподвижной, подъ видомъ

$$a_1 = - Cos \, \nu t \, Cos \, \alpha; \quad a_2 = Sin \, \nu t \quad ; \quad a_3 = Cos \, \nu t \, Sin \, \alpha$$
$$b_1 = - Sin \, \nu t \, Cos \, \alpha; \quad b_2 = - Cos \, \nu t; \quad b_3 = Sin \, \nu t \, Sin \, \alpha$$
$$c_1 = Sin \, \alpha \quad ; \quad c_2 = 0 \quad ; \quad c_3 = Cos \, \alpha$$

и такимъ образомъ получимъ

$$x = \rho \, Cos \, \mu t - \rho_1 \, (Sin \, \lambda t \, Cos \, \nu t \, Cos \, \alpha - Cos \, \lambda t \, Sin \, \alpha)$$
$$y = \rho \, Sin \, \mu t + \rho_1 \, Sin \, \lambda t \, Sin \, \nu t$$
$$z = \rho_1 \, (Sin \, \lambda t \, Cos \, \nu t \, Sin \, \alpha + Cos \, \lambda t \, Cos \, \alpha)$$

Въ частномъ случаѣ, если

$$\lambda = \mu = \nu = k,$$

мы будемъ имѣть

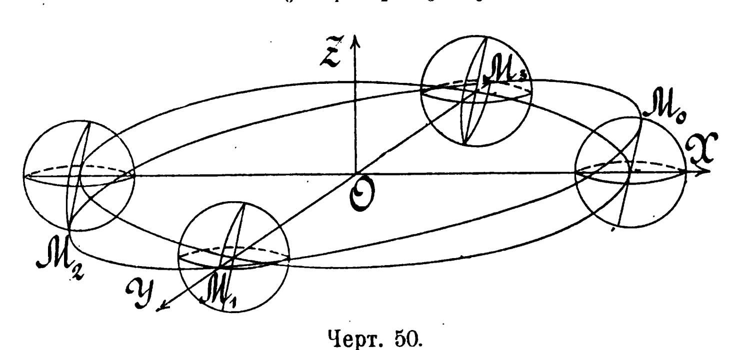
$$x = \rho \, Cos\, kt - \rho_1 \left(\frac{Sin\, 2\, kt}{2} \, Cos\, \alpha - Cos\, kt \, Sin\, \alpha \right)$$
$$y = \rho \, Sin\, kt + \rho_1 \, Sin^2\, kt$$
$$z = \rho_1 \left(\frac{Sin\, 2\, kt}{2} \, Sin\, \alpha + Cos\, kt \, Cos\, \alpha \right).$$

Для этого случая абсолютныя координаты движущейся точки, при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ t, указаны въ нижеслѣдующей таблицѣ

t	x	y	z
0	$\rho + \rho_1 \, Sin\, \alpha$	0	$\rho_1 \, Cos\, \alpha$
$\frac{\pi}{2k}$	0	$\rho + \rho_1$	0
$\frac{\pi}{k}$	$-\rho - \rho_1 \, Sin\, \alpha$	0	$-\rho_1 \, Cos\, \alpha$
$\frac{3\pi}{2k}$	0	$-\rho + \rho_1$	0

Абсолютная траекторія точки M будетъ имѣть видъ кривой,

$$M_0 \, M_1 \, M_2 \, M_3 \, M_0$$



Черт. 50.

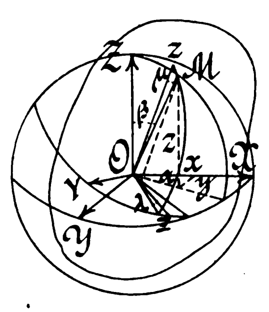
указаной на чертежѣ 50.

Примѣръ 18. Опредѣлить движеніе точекъ твердаго тѣла, имѣющаго неподвижную точку O (черт. 51), если его движеніе задано посредствомъ заданія Эйлеровыхъ угловъ уравненіями

$$\varphi = \varepsilon t$$

$$\varphi = \varepsilon_1 t$$

$$\theta = \delta$$



Черт. 51.

Девять косинусовъ угловъ въ разсматриваемомъ нами случаѣ опредѣлятся формулами

$$a_1 = Cos\,\varepsilon t\; Cos\,\varepsilon_1 t - Sin\,\varepsilon t\; Sin\,\varepsilon_1 t\; Cos\,\delta$$

$$b_1 = -\,Cos\,\varepsilon t\; Sin\,\varepsilon_1 t - Sin\,\varepsilon t\; Cos\,\varepsilon_1 t\; Cos\,\delta$$

$$c_1 = Sin\,\varepsilon t\; Sin\,\delta$$

$$a_2 = Sin\,\varepsilon t\; Cos\,\varepsilon_1 t + Cos\,\varepsilon t\; Sin\,\varepsilon_1 t\; Cos\,\delta$$

$$b_2 = -\,Sin\,\varepsilon t\; Sin\,\varepsilon_1 t + Cos\,\varepsilon t\; Cos\,\varepsilon_1 t\; Cos\,\delta$$

$$c_2 = -\,Cos\,\varepsilon t\; Sin\,\delta$$

$$a_3 = Sin\,\varepsilon_1 t\; Sin\,\delta$$

$$b_3 = Cos\,\varepsilon_1 t\; Sin\,\delta$$

$$c_3 = Cos\,\delta$$

Подставляя же эти выраженія въ равенствѣ

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi a_1 + \eta b_1 + \zeta c_1 \\ y &= \xi a_2 + \eta b_2 + \zeta c_2 \\ z &= \xi a_3 + \eta b_3 + \zeta c_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

гдѣ

$$x, y, z$$

суть абсолютныя, а

$$\xi, \eta, \zeta$$

относительныя координаты какой-нибудь точки разсматриваемаго нами твердаго тѣла, будемъ имѣть формулы, по которымъ найдемъ абсолютныя координаты любой точки этого тѣла въ функціяхъ отъ времени.

Рѣшеніе разсматриваемой задачи можетъ быть нѣсколько развито. Такъ какъ твердое тѣло имѣетъ неподвижную точку, то всѣ его остальныя точки будутъ двигаться по сферическимъ поверхностямъ, а потому представляется удобнымъ, вмѣсто прямолинейныхъ координатъ, ввести въ разсмотрѣніе полярныя. Полагая, что нѣкоторая точка M твердаго тѣла находится на разстояніи ρ отъ его неподвижной точки O и называя полярныя координаты этой точки въ ея абсолютномъ движеніи, т. е. въ ея движеніи относительно системы

$$OXYZ$$

черезъ

$$\rho, \alpha, \beta,$$

а въ ея относительномъ движеніи, т. е. въ движеніи по отношенію къ системѣ

$$O\Xi YZ$$

черезъ

$$\rho, \lambda, \mu,$$

мы будемъ имѣть

$$x = \rho \, Cos \, \alpha \, Sin \, \beta$$
$$y = \rho \, Sin \, \alpha \, Sin \, \beta$$
$$z = \rho \, Cos \, \beta$$

и

$$\xi = \rho \, Cos \, \lambda \, Sin \, \mu$$
$$\eta = \rho \, Sin \, \lambda \, Sin \, \mu$$
$$\zeta = \rho \, Cos \, \mu$$

Подставляя же эти значенія координатъ и найденныя выше значенія девяти косинусовъ въ равенства (35), послѣ ихъ сокращенія на ρ, мы будемъ имѣть:

$$Cos\,\alpha\, Sin\,\beta = Cos\,\lambda\, Sin\,\mu\,(Cos\,\varepsilon t\, Cos\,\varepsilon_1 t - Sin\,\varepsilon t\, Sin\,\varepsilon_1 t\, Cos\,\delta) + $$
$$+ Sin\,\lambda\, Sin\,\mu\,(- Cos\,\varepsilon t\, Sin\,\varepsilon_1 t - Sin\,\varepsilon t\, Cos\,\varepsilon_1 t\, Cos\,\delta) +$$
$$+ Cos\,\mu\, Sin\,\varepsilon t\, Sin\,\delta$$

$$Sin\,\alpha\, Sin\,\beta = Cos\,\lambda\, Sin\,\mu\,(Sin\,\varepsilon t\, Cos\,\varepsilon_1 t + Cos\,\varepsilon t\, Sin\,\varepsilon_1 t\, Cos\,\delta) +$$
$$+ Sin\,\lambda\, Sin\,\mu\,(- Sin\,\varepsilon t\, Sin\,\varepsilon_1 t + Cos\,\varepsilon t\, Cos\,\varepsilon_1 t\, Cos\,\delta) -$$
$$- Cos\,\mu\, Cos\,\varepsilon t\, Sin\,\delta$$

$$Cos\,\beta = Cos\,\lambda\, Sin\,\mu\, Sin\,\varepsilon_1 t\, Sin\,\delta + Sin\,\lambda\, Sin\,\mu\, Cos\,\varepsilon_1 t\, Sin\,\delta +$$
$$+ Cos\,\mu\, Cos\,\delta$$

или

$$\left.\begin{array}{c} Cos\,\alpha\, Sin\,\beta = Cos\,\mu\, Sin\,\varepsilon t\, Sin\,\delta + \\ + Sin\,\mu\,\{Cos\,\varepsilon t\, Cos\,(\varepsilon_1 t + \lambda) - Sin\,\varepsilon t\, Sin\,(\varepsilon_1 t + \lambda)\, Cos\,\delta\} \\ Sin\,\alpha\, Sin\,\beta = - Cos\,\mu\, Cos\,\varepsilon t\, Sin\,\delta + \\ + Sin\,\mu\,\{Sin\,\varepsilon t\, Cos\,(\varepsilon_1 t + \lambda) + Cos\,\varepsilon t\, Sin\,(\varepsilon_1 t + \lambda)\, Cos\,\delta\} \\ Cos\,\beta = Cos\,\mu\, Cos\,\delta + Sin\,\mu\, Sin\,\delta\, Sin\,(\varepsilon_1 t + \lambda) \end{array}\right\}. \quad (35\text{bis})$$

Исключая изъ этихъ уравненій t, мы получимъ зависимость между сферическими координатами

$$\alpha \text{ и } \beta$$

точки M на поверхности сферы радіуса

$$\rho$$

т. е. получимъ уравненіе траекторіи, которую разсматриваемая точка будетъ описывать на упомянутой сферѣ.

Помножимъ съ этой цѣлью первое изъ полученныхъ уравненій на

$$Sin\,\varepsilon t\, Sin\,\delta,$$

второе на

$$- Cos\,\varepsilon t\, Sin\,\delta,$$

третье на

$$Cos\,\delta$$

и затѣмъ сложимъ ихъ между собой; мы будемъ имѣть

$$Sin\,\delta\ Sin\,\beta\ Sin\,(\varepsilon t-\alpha)+Cos\,\beta\ Cos\,\delta=Cos\,\mu,$$

откуда получимъ, что

$$Sin\,(\varepsilon t-\alpha)=\frac{Cos\,\mu-Cos\,\beta\ Cos\,\delta}{Sin\,\beta\ Sin\,\delta}$$

и такимъ образомъ найдемъ, что

$$\varepsilon t=arc\,Sin\,\frac{Cos\,\mu-Cos\,\beta\ Cos\,\delta}{Sin\,\delta\ Sin\,\beta}+\alpha\quad . \quad . \quad (36)$$

Съ другой стороны третье изъ уравненій (35 bis) даетъ, что

$$Sin\,(\varepsilon_1 t+\lambda)=\frac{Cos\,\beta-Cos\,\mu\ Cos\,\delta}{Sin\,\mu\ Sin\,\delta},$$

откуда

$$\varepsilon_1 t=arc\,Sin\,\frac{Cos\,\beta-Cos\,\mu\ Cos\,\delta}{Sin\,\mu\ Sin\,\delta}-\lambda\quad . \quad . \quad (37)$$

Исключая t изъ уравненій (36) и (37), мы найдемъ искомое уравненіе траекторіи подъ видомъ

$$\lambda+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\alpha=arc\,Sin\,\frac{Cos\,\beta-Cos\,\mu\ Cos\,\delta}{Sin\,\mu\ Sin\,\delta}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}arc\,Sin\,\frac{Cos\,\mu-Cos\,\beta\ Cos\,\delta}{Sin\,\delta\ Sin\,\beta}$$

Въ частномъ случаѣ, если

$$\varepsilon_1=0,$$

то уравненіе траекторіи приметъ видъ

$$Cos\,\beta=Cos\,\mu\ Cos\,\delta+Sin\,\mu\ Sin\,\delta\ Sin\,\lambda,$$

откуда видно, что, для данной точки твердаго тѣла, β есть величина постоянная и, слѣдовательно, каждая его точка описываетъ на соотвѣтствующей ей сферической поверхности окружность около оси OZ; при этомъ, на основаніи равенства (36),

$$\alpha=\varepsilon t+\alpha_0,$$

гдѣ

$$\alpha_0 = -\, arc\, Sin\, \frac{Cos\, \mu - Cos\, \beta\, Cos\, \delta}{Sin\, \delta\; Sin\, \beta}$$

46. **Формулы Олинда Родрига** (d'Olinde Rodrigues). Девять косинусовъ угловъ, опредѣляющихъ положеніе осей, неизмѣнно связанныхъ съ твердымъ тѣломъ, относительно неподвижныхъ осей въ пространствѣ, могутъ быть выражены въ зависимости отъ трехъ независимыхъ между собой и соотвѣтственно выбранныхъ параметровъ и посредствомъ раціональныхъ формулъ.

Между прочимъ, это можно сдѣлать, выбирая за независимые параметры тангенсы половинъ Эйлеровыхъ угловъ, т. е. вводя въ формулы (34) новыя перемѣнныя l, m и n, опредѣляемыя формулами

$$l = tng\, \frac{\varphi}{2}, \quad m = tng\, \frac{\psi}{2}, \quad n = tng\, \frac{\theta}{2}.$$

Болѣе симметричныя и удобныя на практикѣ выраженія девяти косинусовъ угловъ получаются введеніемъ новыхъ перемѣнныхъ, опредѣляемыхъ равенствами

$$t = Sin\, \frac{\theta}{2}\; Cos\, \frac{\varphi - \psi}{2}$$

$$u = Sin\, \frac{\theta}{2}\; Sin\, \frac{\varphi - \psi}{2}$$

$$v = Cos\, \frac{\theta}{2}\; Sin\, \frac{\varphi + \psi}{2}$$

$$w = -Cos\, \frac{\theta}{2}\; Cos\, \frac{\varphi + \psi}{2}$$

и, слѣдовательно, связанныхъ между собой уравненіемъ

$$t^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

Что касается выраженій девяти косинусовъ въ зависимости отъ этихъ параметровъ, то они получаются непосредственнымъ преобразованіемъ формулъ (34).

Производя эти преобразованія, мы будемъ имѣть

$$a_1 = Cos\,\varphi\, Cos\,\psi - Sin\,\varphi\, Sin\,\psi\, Cos\,\theta =$$

$$= \left(Cos^2\frac{\theta}{2} + Sin^2\frac{\theta}{2}\right) Cos\,\varphi\, Cos\,\psi - \left(Cos^2\frac{\theta}{2} - Sin^2\frac{\theta}{2}\right) Sin\,\varphi\, Sin\,\psi =$$

$$= Cos^2\frac{\theta}{2}\, Cos\,(\varphi+\psi) + Sin^2\frac{\theta}{2}\, Cos\,(\varphi-\psi) =$$

$$= Cos^2\frac{\theta}{2}\, Cos^2\frac{\varphi+\psi}{2} - Cos^2\frac{\theta}{2}\, Sin^2\frac{\varphi+\psi}{2} +$$

$$+ Sin^2\frac{\theta}{2}\, Cos^2\frac{\varphi-\psi}{2} - Sin^2\frac{\theta}{2}\, Sin^2\frac{\varphi-\psi}{2}$$

и слѣдовательно

$$a_1 = t^2 - u^2 - v^2 + w^2;$$

$$b_1 = - Cos\,\varphi\, Sin\,\psi - Sin\,\varphi\, Cos\,\psi\, Cos\,\theta =$$

$$= -\left(Cos^2\frac{\theta}{2} + Sin^2\frac{\theta}{2}\right) Cos\,\varphi\, Sin\,\psi -$$

$$- \left(Cos^2\frac{\theta}{2} - Sin^2\frac{\theta}{2}\right) Sin\,\varphi\, Cos\,\psi =$$

$$= - Cos^2\frac{\theta}{2}\, Sin\,(\varphi+\psi) + Sin^2\frac{\theta}{2}\, Sin\,(\varphi-\psi) =$$

$$= - 2\; Cos^2\frac{\theta}{2}\, Sin\frac{\varphi+\psi}{2}\, Cos\frac{\varphi+\psi}{2} +$$

$$+ 2\; Sin^2\frac{\theta}{2}\, Sin\frac{\varphi-\psi}{2}\, Cos\frac{\varphi-\psi}{2}$$

и слѣдовательно

$$b_1 = 2\,(tu + vw);$$

$$c_1 = Sin\,\varphi\, Sin\,\theta =$$

$$= Sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2} + \frac{\varphi-\psi}{2}\right) Sin\,\theta =$$

$$= 2 Sin\frac{\theta}{2}\, Cos\frac{\theta}{2}\, Sin\frac{\varphi+\psi}{2}\, Cos\frac{\varphi-\psi}{2} +$$

$$+ 2 Sin\frac{\theta}{2}\, Cos\frac{\theta}{2}\, Cos\frac{\varphi+\psi}{2}\, Sin\frac{\varphi-\psi}{2}$$

и слѣдовательно

$$c_1 = 2\,(tv - uw);$$

$$a_2 = Sin\,\varphi\, Cos\,\psi + Cos\,\varphi\, Sin\,\psi\, Cos\,\theta =$$

$$= \left(Cos^2\frac{\theta}{2} + Sin^2\frac{\theta}{2}\right) Sin\,\varphi\, Cos\,\psi +$$

$$+ \left(Cos^2\frac{\theta}{2} - Sin^2\frac{\theta}{2}\right) Cos\,\varphi\, Sin\,\psi =$$

$$= Cos^2\frac{\theta}{2}\, Sin\,(\varphi + \psi) + Sin^2\frac{\theta}{2}\, Sin\,(\varphi - \psi) =$$

$$= 2\, Cos^2\frac{\theta}{2}\, Sin\,\frac{\varphi+\psi}{2}\, Cos\,\frac{\varphi+\psi}{2} +$$

$$+ 2\, Sin^2\frac{\theta}{2}\, Sin\,\frac{\varphi-\psi}{2}\, Cos\,\frac{\varphi-\psi}{2}$$

и слѣдовательно

$$a_2 = 2\,(tu - vw);$$

$$b_2 = - Sin\,\varphi\, Sin\,\psi + Cos\,\varphi\, Cos\,\psi\, Cos\,\theta =$$

$$= -\left(Cos^2\frac{\theta}{2} + Sin^2\frac{\theta}{2}\right) Sin\,\varphi\, Sin\,\psi +$$

$$+ \left(Cos^2\frac{\theta}{2} - Sin^2\frac{\theta}{2}\right) Cos\,\varphi\, Cos\,\psi =$$

$$= Cos^2\frac{\theta}{2}\, Cos\,(\varphi + \psi) - Sin^2\frac{\theta}{2}\, Cos\,(\varphi - \psi) =$$

$$= Cos^2\frac{\theta}{2}\, Cos^2\frac{\varphi+\psi}{2} - Cos^2\frac{\theta}{2}\, Sin^2\frac{\varphi+\psi}{2} - Sin^2\frac{\theta}{2}\, Cos^2\frac{\varphi-\psi}{2} +$$

$$+ Sin^2\frac{\theta}{2}\, Sin^2\frac{\varphi-\psi}{2}$$

и слѣдовательно

$$b_2 = - t^2 + u^2 - v^2 + w^2;$$

$$c_2 = - Cos\,\varphi\, Sin\,\theta =$$

$$= - Cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2} + \frac{\varphi-\psi}{2}\right) Sin\,\theta =$$

$$= 2 Sin\,\frac{\theta}{2}\, Cos\,\frac{\theta}{2}\, Sin\,\frac{\varphi+\psi}{2}\, Sin\,\frac{\varphi-\psi}{2} -$$

$$- 2\, Sin\,\frac{\theta}{2}\, Cos\,\frac{\theta}{2}\, Cos\,\frac{\varphi+\psi}{2}\, Cos\,\frac{\varphi-\psi}{2}$$

и слѣдовательно

$$c_2 = 2\,(uv + tw);$$

$$a_3 = Sin\,\psi\,Sin\,\theta =$$

$$= Sin\left(\frac{\psi+\varphi}{2} + \frac{\psi-\varphi}{2}\right) Sin\,\theta =$$

$$= 2\,Sin\frac{\theta}{2}\,Cos\frac{\theta}{2}\,Sin\frac{\varphi+\psi}{2}\,Cos\frac{\varphi-\psi}{2} -$$

$$- 2Sin\frac{\theta}{2}\,Cos\frac{\theta}{2}\,Cos\frac{\varphi+\psi}{2}\,Sin\frac{\varphi-\psi}{2}$$

и слѣдовательно

$$a_3 = 2\,(tv + uw);$$

$$b_3 = Cos\,\psi\,Sin\,\theta =$$

$$= Cos\left(\frac{\psi+\varphi}{2} + \frac{\psi-\varphi}{2}\right) Sin\,\theta =$$

$$= 2Sin\frac{\theta}{2}\,Cos\frac{\theta}{2}\,Cos\frac{\varphi+\psi}{2}\,Cos\frac{\varphi-\psi}{2} +$$

$$+ 2Sin\frac{\theta}{2}\,Cos\frac{\theta}{2}\,Sin\frac{\varphi+\psi}{2}\,Sin\frac{\varphi-\psi}{2}$$

и слѣдовательно

$$b_3 = 2\,(uv - tw);$$

$$c_3 = Cos\,\theta =$$

$$= Cos^2\frac{\theta}{2} - Sin^2\frac{\theta}{2} =$$

$$= Cos^2\frac{\theta}{2}\,Sin^2\frac{\varphi+\psi}{2} + Cos^2\frac{\theta}{2}\,Cos^2\frac{\varphi+\psi}{2} -$$

$$- Sin^2\frac{\theta}{2}\,Sin^2\frac{\varphi-\psi}{2} - Sin^2\frac{\theta}{2}\,Cos^2\frac{\varphi-\psi}{2}$$

и слѣдовательно

$$c_3 = -t^2 - u^2 + v^2 + w^2.$$

Группируя полученные результаты, мы будемъ имѣть

$$a_1 = t^2 - u^2 - v^2 + w^2; \quad a_2 = 2(tu - vw) \quad ;$$
$$b_1 = 2(tu + vw) \quad ; \quad b_2 = -t^2 + u^2 - v^2 + w^2;$$
$$c_1 = 2(tv - uw) \quad ; \quad c_2 = 2(uv + tw) \quad ;$$
$$a_3 = 2(tv + uw)$$
$$b_3 = 2(uv - tw)$$
$$c_3 = -t^2 - u^2 + v^2 + w^2 \quad .$$

Полагая далѣе, что

$$t = \frac{\lambda}{\sigma}, \quad u = \frac{\mu}{\sigma}, \quad v = \frac{\nu}{\sigma}, \quad w = \frac{\rho}{\sigma}$$

и замѣчая, что при этомъ

$$\sigma^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2,$$

такъ какъ

$$t^2 + u^2 + v^2 + w^2 = \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2}{\sigma^2} = 1$$

и что, слѣдовательно, параметры

$$\lambda, \ \mu, \ \nu \text{ и } \rho$$

могутъ быть задаваемы совершенно произвольно, мы будетъ имѣть

$$a_1 = \frac{\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + \rho^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2}$$

$$b_1 = \frac{2(\lambda\mu + \nu\rho)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2}$$

$$c_1 = \frac{2(\lambda\nu - \mu\rho)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2}$$

$$a_2 = \frac{2(\lambda\mu - \nu\rho)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2}$$

$$b_2 = \frac{-\lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 + \rho^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2}$$

$$c_2 = \frac{2(\mu\nu + \lambda\rho)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2}$$

$$a_3 = \frac{2(\lambda\nu + \mu\rho)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2}$$

$$b_3 = \frac{2(\mu\nu - \lambda\rho)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2}$$

$$c_3 = \frac{-\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 + \rho^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2}$$

Эти формулы, извѣстныя подъ названіемъ формулъ Олинда Родрига, имѣютъ приложеніе при разсмотрѣніи, такъ называемыхъ, **алгебраическихъ движеній** твердаго тѣла, т. е. такихъ его движеній, при которыхъ элементы, опредѣляющіе его положенія, являются алгебраическими функціями одного или нѣсколькихъ независимыхъ между собою параметровъ [1]).

47. **Теорема.** *Векторъ перемѣщенія абсолютнаго движенія точки, за любой промежутокъ времени, равняется геометрической суммѣ векторовъ перемѣщеній ея относительнаго и переноснаго движеній, за тотъ же промежутокъ времени.*

Положимъ, что обозначенія относительныхъ и абсолютныхъ координатъ нѣкоторой точки M, а также элементовъ, опредѣляющихъ положеніе координатной системы

$$O_1\, \Xi\, \Upsilon Z$$

относительно системы

$$OXYZ,$$

введенныя въ § 43, относятся къ нѣкоторому моменту времени t, такъ что, для этого момента, мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \xi a_1 + \eta b_1 + \zeta c_1 \\ y &= y_0 + \xi a_2 + \eta b_2 + \zeta c_2 \\ z &= z_0 + \xi a_3 + \eta b_3 + \zeta c_3 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (38)$$

Обозначимъ тѣ же величины для момента времени t_1, отстоящаго отъ момента времени t на промежутокъ

$$\Delta t.$$

[1]) Объемъ настоящаго курса не позволяетъ намъ остановиться на разсмотрѣніи этого рода движеній, представляющихъ въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ существенный интересъ. Вопросъ объ алгебраическихъ движеніяхъ вообще и въ частности приложеніе къ разсмотрѣнію такихъ движеній формулъ Олинда Родрига довольно подробно затронутъ въ примѣчаніяхъ, сдѣланныхъ Darboux къ курсу Koenigs'a, „Leçons de cinematique" 1897. См. Note III de M. Darboux p. 352.

тѣми же буквами съ указателями 1 наверху; тогда для момента времени t_1 мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= x_0^{\,1} + \xi^1 a_1^{\,1} + \eta^1 b^1{}_1 + \zeta^1 c_1^{\,1} \\ y^1 &= y_0^{\,1} + \xi^1 a_2^{\,1} + \eta^1 b^1{}_2 + \zeta^1 c_2^{\,1} \\ z^1 &= z_0^{\,1} + \xi^1 a_3^{\,1} + \eta^1 b^1{}_3 + \zeta^1 c_3^{\,1} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (39)$$

Вычитая изъ формулъ (39) почленно соотвѣтственныя формулы (38), получимъ

$$\begin{aligned} x^1 - x &= x_0^{\,1} - x_0 + \xi^1 a_1^{\,1} - \xi a_1 + \eta^1 b_1^{\,1} - \eta b_1 + \zeta^1 c_1^{\,1} - \zeta c_1 \\ y^1 - y &= y_0^{\,1} - y_0 + \xi^1 a_2^{\,1} - \xi a_2 + \eta^1 b_2^{\,1} - \eta b_2 + \zeta^1 c_2^{\,1} - \zeta c_2 \\ z^1 - z &= z_0^{\,1} - z_0 + \xi^1 a_3^{\,1} - \xi a_3 + \eta^1 b_3^{\,1} - \eta b_3 + \zeta^1 c_3^{\,1} - \zeta c_3 \end{aligned}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x^1 - x = x_0^{\,1} - x_0 &+ \xi^1 (a_1^{\,1} - a_1) + a_1 (\xi^1 - \xi) + \\ &+ \eta^1 (b_1^{\,1} - b_1) + b_1 (\eta^1 - \eta) + \\ &+ \zeta^1 (c_1^{\,1} - c_1) + c_1 (\zeta_1^{\,1} - \zeta) \\ y^1 - y = y_0^{\,1} - y_0 &+ \xi^1 (a_2^{\,1} - a_2) + a_2 (\xi^1 - \xi) + \\ &+ \eta^1 (b_2^{\,1} - b_2) + b_2 (\eta^1 - \eta) + \\ &+ \zeta^1 (c_2^{\,1} - c_2) + c_2 (\zeta^1 - \zeta) \\ z^1 - z = z_0^{\,1} - z_0 &+ \xi^1 (a_3^{\,1} - a_3) + a_3 (\xi^1 - \xi) + \\ &+ \eta^1 (b_3^{\,1} - b_3) + b_3 (\eta^1 - \eta) + \\ &+ \zeta^1 (c_3^{\,1} - c_3) + c_3 (\zeta^1 - \zeta), \end{aligned}\right\} , \; . \; (40)$$

гдѣ разности

$$x^1 - x, \quad y^1 - y, \quad z^1 - z$$

представляютъ изъ себя проекціи на оси координатъ вектора перемѣщенія точки M въ ея абсолютномъ движеніи и, слѣдовательно, называя этотъ векторъ перемѣщенія черезъ

$$W_a,$$

мы можемъ написать

$$\left.\begin{aligned}
W_a \operatorname{Cos}(W_a, X) &= x_0^1 - x_0 + \xi^1 (a_1^1 - a_1) + \\
&+ a_1 (\xi^1 - \xi) + \eta^1 (b_1^1 - b_1) + b_1 (\eta^1 - \eta) + \\
&+ \zeta^1 (c_1^1 - c_1) + c_1 (\zeta^1 - \zeta) \\
W_a \operatorname{Cos}(W_a, Y) &= y_0^1 - y_0 + \xi^1 (a_2^1 - a_2) + \\
&+ a_2 (\xi^1 - \xi) + \eta^1 (b_2^1 - b_2) + b_2 (\eta^1 - \eta) + \\
&+ \zeta^1 (c_2^1 - c_2) + c_2 (\zeta^1 - \zeta) \\
W_a \operatorname{Cos}(W_a, Z) &= z_0^1 - z_0 + \xi^1 (a_3^1 - a_3) + \\
&+ a_3 (\xi^1 - \xi) + \eta^1 (b_3^1 - b_3) + b_3 (\eta^1 - \eta) + \\
&+ \zeta^1 (c_3^1 - c_3) + c_3 (\zeta^1 - \zeta)
\end{aligned}\right\} . \quad (41)$$

Если мы предположимъ, что координатная система

$$O\,\Xi\Upsilon Z$$

неподвижна, то абсолютное движеніе разсматриваемой точки отождествится съ ея относительнымъ движеніемъ, и, слѣдовательно, если въ правыхъ частяхъ формулъ (40) мы положимъ, что

$$x_0^1 = x_0,\ y_0^1 = y_0,\ z_0^1 = z_0$$

и что

$$\begin{aligned}
a_1^1 &= a_1,\ b_1^1 = b_1,\ c_1^1 = c_1 \\
a_2^1 &= a_2,\ b_2^1 = b_2,\ c_2^1 = c_2 \\
a_3^1 &= a_3,\ b_3^1 = b_3,\ c_3^1 = c_3,
\end{aligned}$$

то лѣвыя части этихъ формулъ выразятъ проекціи на оси координатъ вектора перемѣщенія точки M въ ея относительномъ движеніи, и такимъ образомъ, обозначая этотъ векторъ черезъ

$$W_r,$$

мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} W_r \, Cos\,(W_r\,, X) &= a_1(\xi^1 - \xi) + b_1\,(\eta^1 - \eta) + c_1\,(\zeta^1 - \zeta) \\ W_r \, Cos\,(W_r\,, Y) &= a_2(\xi^1 - \xi) + b_2\,(\eta^1 - \eta) + c_2\,(\zeta^1 - \zeta) \\ W_r \, Cos\,(W_r\,, Z) &= a_3(\xi^1 - \xi) + b_3\,(\eta^1 - \eta) + c_3\,(\zeta^1 - \zeta) \end{aligned}\right\} . \quad (42)$$

Если же мы предположимъ, что точка M неизмѣнно связана съ координатной системой

$$O_1 \Xi \Upsilon Z,$$

то отождествимъ ея абсолютное движеніе съ переноснымъ, и, значитъ, если въ правыхъ частяхъ формулъ (40) положимъ, что

$$\xi^1 = \xi, \;\; \eta^1 = \eta, \;\; \zeta^1 = \zeta,$$

то ихъ лѣвыя части выразятъ проекціи на оси координатъ вектора перемѣщенія разсматриваемой нами точки въ ея переносномъ движеніи, и, слѣдовательно, обозначая этотъ векторъ чрезъ

$$W_e\,,$$

мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} W_e \, Cos\,(W_e\,, X) &= x_0{}^1 - x_0 + \xi\,(a_1{}^1 - a_1) + \\ &\quad + \eta\,(b_1{}^1 - b_1) + \zeta\,(c_1{}^1 - c_1) \\ W_e \, Cos\,(W_e\,, Y) &= y_0{}^1 - y_0 + \xi\,(a_2{}^1 - a_2) + \\ &\quad + \eta\,(b_2{}^1 - b_2) + \zeta\,(c_2{}^1 - c_2) \\ W_e \, Cos\,(W_e\,, Z) &= z_0{}^1 - z_0 + \xi\,(a_3{}^1 - a_3) + \\ &\quad + \eta\,(b_3{}^1 - b_3) + \zeta\,(c_3{}^1 - c_3) \end{aligned}\right\} . \quad (43)$$

Сопоставляя теперь между собой формулы (41), (42) и (43), мы видимъ, что

$$W_a \, Cos(W_a, X) = W_r \, Cos(W_r, X) + W_e \, Cos(W_e, X)$$
$$W_a \, Cos(W_a, Y) = W_r \, Cos(W_r, Y) + W_e \, Cos(W_e, Y)$$
$$W_a \, Cos(W_a, Z) = W_r \, Cos(W_r, Z) + W_e \, Cos(W_e, Z)$$

и слѣдовательно, что

$$\overline{W_a} = \overline{W_r} + \overline{W_e},$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

Глава V.

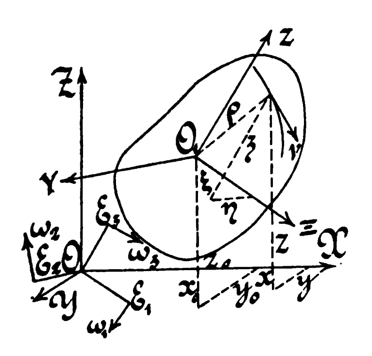
Скорости абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній.

Скорости точекъ твердаго тѣла.

48. Выведемъ аналитическія выраженія скорости абсолютнаго движенія точки и скоростей ея относительнаго и переноснаго движеній, когда эти послѣднія заданы однимъ изъ способовъ, указанныхъ въ предыдущей главѣ.

Положимъ, что нѣкоторая точка M движется внутри твердаго тѣла S (черт. 52), съ которымъ неизмѣнно связана координатная система

$$O_1\,\Xi\,\Upsilon Z,$$



Черт. 52.

и что это твердое тѣло движется относительно координатной системы

$$O\,X\,Y\,Z,$$

которую мы считаемъ неподвижной въ пространствѣ. Положимъ, что относительныя координаты разсматриваемой точки суть

$$\xi, \eta, \zeta$$

и что движеніе твердаго тѣла S задано посредствомъ заданія въ функціяхъ отъ времени координатъ

$$x_0, y_0, z_0$$

начала неизмѣнно связанной съ нимъ координатной системы и Эйлеровыхъ угловъ

$$\varphi, \psi, \theta$$

или какихъ-либо другихъ независимыхъ параметровъ, опредѣляющихъ девять косинусовъ, указанныхъ въ нижеприведенной таблицѣ:

	Ξ	Υ	Z
X	a_1	b_1	c_1
Y	a_2	b_2	c_2
Z	a_3	b_3	c_3

Назовемъ скорость точки M въ ея абсолютномъ движеніи черезъ

$$v_a$$

и найдемъ ея проекціи на оси системы

$$O_1 \Xi \Upsilon Z$$

по общей формулѣ для проекцій скорости точки на подвижное направленіе.

Мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned}
v_a \, Cos\,(v_a \,.\, \Xi) &= \frac{d\left\{\rho \, Cos\,(\rho, \Xi)\right\}}{dt} + \\
+ v_0 \, Cos\,(v_0, \Xi) &- \rho\omega_1 \, Cos\,(\rho, \omega_1) \\
v_a \, Cos\,(v_a \,,\, \Upsilon) &= \frac{d\left\{\rho \, Cos\,(\rho, \Upsilon)\right\}}{dt} + \\
+ v_0 \, Cos\,(v_0, \Upsilon) &- \rho\omega_2 \, Cos\,(\rho, \omega_2) \\
v_a \, Cos\,(v_a \,.\, Z) &= \frac{d\left\{\rho \, Cos\,(\rho, Z)\right\}}{dt} + \\
+ v_0 \, Cos\,(v_0, Z) &- \rho\omega_3 \, Cos\,(\rho, \omega_3)
\end{aligned}\right\}, \quad . \quad (44)$$

гдѣ

$$\rho$$

есть радіусъ векторъ точки M относительно начала координатной системы, неизмѣнно связанной съ разсматриваемымъ нами твердымъ тѣломъ,

$$v_0$$

скорость этого начала, а

$$\omega_1, \ \omega_2 \ \text{и} \ \omega_3$$

суть скорости концовъ векторовъ, равныхъ единицѣ длины и проведенныхъ изъ начала неподвижной координатной системы параллельно соотвѣтственнымъ осямъ системы

$$O_1 \, \Xi \Upsilon Z$$

Имѣя въ виду, что проекціи скорости

$$v_0$$

на оси неподвижной координатной системы суть соотвѣтственно

$$x'_0, \ y'_0, \ z'_0,$$

мы можемъ написать, что

$$v_0 \, Cos\,(v_0, \Xi) = x_0'a_1 + y_0'a_2 + z_0'a_3$$
$$v_0 \, Cos\,(v_0, \Upsilon) = x_0'b_1 + y_0'b_2 + z_0'b_3$$
$$v_0 \, Cos\,(v_0, Z) = x_0'c_1 + y_0'c_2 + z_0'c_3$$

Обозначимъ проекціи на оси подвижной координатной системы скоростей

$$\omega_1, \ \omega_2 \ \text{и} \ \omega_3$$

какъ указано въ нижеприведенной таблицѣ

	Ξ	Υ	Z
ω_1	$\omega_{1\xi}$	$\omega_{1\eta}$	$\omega_{1\zeta}$
ω_2	$\omega_{2\xi}$	$\omega_{2\eta}$	$\omega_{2\zeta}$
ω_3	$\omega_{3\xi}$	$\omega_{3\eta}$	$\omega_{3\zeta}$

. . . . (45)

и замѣтимъ, что

$$\omega_{1\xi} = \omega_{2\eta} = \omega_{3\zeta} = 0,$$

ибо

$$\omega_1 \perp \Xi, \ \omega_2 \perp \Upsilon, \ \omega_3 \perp Z.$$

Что касается остальныхъ шести величинъ, входящихъ въ составъ вышеприведенной таблицы, то между ними существуютъ зависимости, выводимыя на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Имѣя въ виду, что

$$\omega_1$$

есть скорость конца вектора, равнаго единицѣ длины и параллельнаго оси $O\Xi$, т. е. такого, проекція котораго на ось $O\Upsilon$ равняется нулю и что, кромѣ того, скорость другого конца этого вектора тоже равняется нулю, такъ какъ онъ проведенъ изъ неподвижной точки O, на основаніи общей формулы

для проекціи скорости на подвижное направленіе, мы будемъ имѣть

$$\omega_{1\eta} = -\omega_{2\xi}$$

и точно также найдемъ

$$\omega_{2\zeta} = -\omega_{3\eta}$$

$$\omega_{3\xi} = -\omega_{1\zeta}.$$

Полагая затѣмъ, что

$$\omega_{2\zeta} = p$$

$$\omega_{3\xi} = q$$

$$\omega_{1\eta} = r,$$

мы можемъ таблицу (45) переписать подъ видомъ

	Ξ	Υ	Z
ω_1	0	r	$-q$
ω_2	$-r$	0	p
ω_3	q	$-p$	0,

а такъ какъ проекціи вектора

$$\rho$$

на оси системы

$$O_1\ \Xi\Upsilon Z$$

суть соотвѣтственно

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,$$

то мы будемъ имѣть, что

$$\overline{\rho\omega_1} = r\eta - q\zeta$$

$$\overline{\rho\omega_2} = p\zeta - r\xi$$

$$\overline{\rho\omega_3} = q\xi - p\eta,$$

послѣ чего представимъ формулы (44) подъ видомъ

$$\left.\begin{aligned} v_a\, Cos\,(v_a\,,\Xi\,) &= \frac{d\xi}{dt} + x_0' a_1 + y_0' a_2 + z_0' a_3 + q\zeta - r\eta \\ v_a\, Cos\,(v_a\,,\Upsilon\,) &= \frac{d\eta}{dt} + x_0' b_1 + y_0' b_2 + z_0' b_3 + r\xi - p\zeta \\ v_a\, Cos\,(v_a\,,Z\,) &= \frac{d\zeta}{dt} + x_0' c_1 + y_0' c_2 + z_0' c_3 + p\eta - q\xi \end{aligned}\right\} \ldots \quad (46)$$

Такимъ образомъ, мы имѣемъ выраженія проекціи на оси системы

$$O_1\,\Xi\Upsilon Z$$

скорости абсолютнаго движенія точки M, а слѣдовательно найдемъ и выраженіе этой скорости по формулѣ

$$v_a =$$

$$= \sqrt{\{\xi' + x_0'a_1 + y_0'a_2 + z_0'a_3 + q\zeta - r\eta\}^2 + \{\eta' + x_0'b_1 + y_0'b_2 + z_0'b_3 + r\xi - p\zeta\}^2 + \{\zeta' + x_0'c_1 + y_0'c_2 + z_0'c_3 + p\eta - q\xi\}^2},$$

гдѣ передъ корнемъ слѣдуетъ брать знакъ плюсъ, ибо онъ выражаетъ лишь длину вектора, изображающаго скорость, что касается направленія послѣдней, то оно найдется въ зависимости отъ косинусовъ угловъ, образуемыхъ ею съ координатными осями, опредѣляемыхъ уравненіями (46).

Если мы предположимъ, что координатная система

$$O_1\,\Xi\Upsilon Z$$

неподвижна, т. е. если положимъ въ формулахъ (46), что

$$x_0,\ y_0,\ z_0$$

суть величины постоянныя и что

$$p = q = r = 0,$$

то правыя части этихъ формулъ представятъ проекціи на оси упомянутой системы скорости точки M въ ея относительномъ движеніи и, обозначая эту скорость черезъ

$$v_r,$$

мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} v_r \, Cos\,(v_r, \Xi) &= \frac{d\xi}{dt} \\ v_r \, Cos\,(v_r, \Upsilon) &= \frac{d\eta}{dt} \\ v_r \, Cos\,(v_r, Z) &= \frac{d\zeta}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (47)$$

Величина скорости относительнаго движенія опредѣляется формулой

$$v_r = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2},$$

гдѣ передъ корнемъ надо брать знакъ плюсъ, а ея направленіе косинусами угловъ, образуемыхъ ею съ осями системы

$$O_1\,\Xi\Upsilon Z,$$

которыя могутъ быть опредѣлены по формуламъ (47).

Если въ формулахъ (46) мы положимъ, что

$$\xi,\ \eta,\ \zeta$$

суть величины постоянныя, то ихъ правыя части представятъ проекціи на оси координатной системы

$$O_1\,\Xi\,\Upsilon Z$$

скорости точки M въ ея переносномъ движеніи и, обозначая эту скорость черезъ

$$v_e$$

мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} v_e \, Cos\,(v_e, \Xi) &= x_0' a_1 + y_0' a_2 + z_0' a_3 + q\zeta - r\eta \\ v_e \, Cos\,(v_e, \Upsilon) &= x_0' b_1 + y_0' b_2 + z_0' b_3 + r\xi - p\zeta \\ v_e \, Cos\,(v_e, Z) &= x_0' c_1 + y_0' c_2 + z_0' c_3 + p\eta - q\xi \end{aligned}\right\} \ldots (48)$$

Величина скорости переноснаго движенія будетъ

$$v_e =$$

$$= \sqrt{\{x_0' a_1 + y_0' a_2 + z_0' a_3 + q\zeta - r\eta\}^2 + \{x_0' b_1 + y_0' b_2 + z_0' b_3 + r\xi - p\zeta\}^2 + \\ + \{x_0' c_1 + y_0' c_2 + z_0' c_3 + p\eta - q\xi\}^2},$$

гдѣ передъ корнемъ надо брать знакъ плюсъ, а ея направленіе опредѣлится косинусами угловъ, образуемыхъ ею съ осями системы

$$O_1 \Xi \Upsilon Z,$$

которые найдутся изъ равенствъ (48).

Замѣтимъ, что, если

$$\xi, \ \eta, \ \zeta$$

суть постоянныя величины, то точка M неизмѣнно связана съ осями системы

$$O_1 \Xi \Upsilon Z,$$

а потому мы можемъ ее разсматривать, какъ точку твердаго тѣла, въ которомъ построена эта система; такимъ образомъ скорость

$$v_e$$

является скоростью точки твердаго тѣла, движущагося относительно системы

$$O X Y Z,$$

а формулы (48) выражаютъ проекціи скорости точки твердаго тѣла на оси неизмѣнно связанной съ нимъ координатной системы.

Эти формулы носятъ названіе **формулъ Эйлера для проекцій скоростей точекъ твердаго тѣла.**

Теорема. *Скорость абсолютнаго движенія точки есть геометрическая сумма скоростей ея относительнаго и переноснаго движеній.*

Сопоставляя между собой формулы (46), (47) и (48), получимъ, что

$$v_a \, Cos\,(v_a\,,\Xi) = v_r \, Cos\,(v_r\,,\Xi) + v_e \, Cos\,(v_e\,,\Xi)$$
$$v_a \, Cos\,(v_a\,,\Upsilon) = v_r \, Cos\,(v_r\,,\Upsilon) + v_e \, Cos\,(v_e\,,\Upsilon)$$
$$v_a \, Cos\,(v_a\,,Z) = v_r \, Cos\,(v_r\,,Z) + v_e \, Cos\,(v_e\,,Z)$$

и, слѣдовательно, будемъ имѣть, что

$$\overline{v_a} = \overline{v_r} + \overline{v_e}\,,$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

Замѣтимъ, что разсматриваемая теорема можетъ быть доказана и какъ слѣдствіе теоремы, что векторъ перемѣщенія абсолютнаго движенія за нѣкоторый промежутокъ времени есть геометрическая сумма векторовъ перемѣщеній относительнаго и переноснаго движеній за тотъ же промежутокъ времени. Въ самомъ дѣлѣ, полагая, что векторы перемѣщеній абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній нѣкоторой точки M за промежутокъ времени Δt суть соотвѣтственно

$$\overline{\Delta s_a}\,,\quad \overline{\Delta s_r}\,,\quad \overline{\Delta s_e}$$

мы будетъ имѣть

$$\overline{\Delta s_a} = \overline{\Delta s_r} + \overline{\Delta s_e}$$

и, слѣдовательно, получимъ

$$\frac{\overline{\Delta s_a}}{\Delta t} = \frac{\overline{\Delta s_r}}{\Delta t} + \frac{\overline{\Delta s_e}}{\Delta t}\,,$$

откуда

$$\overline{lim\,\frac{\Delta s_a}{\Delta t}} = \overline{lim\,\frac{\Delta s_r}{\Delta t}} + \overline{lim\,\frac{\Delta s_e}{\Delta t}}$$

или

$$\overline{v_a} = \overline{v_r} + \overline{v_e}$$

49. Формулы (46) предыдущаго § даютъ возможность вывести нѣкоторыя соотношенія, которыя понадобятся намъ въ послѣдующемъ изложеніи.

Положимъ, что начало координатной системы, неизмѣнно связанной съ твердымъ тѣломъ, совпадаетъ съ началомъ неподвижной координатной системы и что точка M лежитъ на оси OX въ разстояніи единицы длины отъ начала координатъ (черт. 53).

Въ такомъ случаѣ скорость точки M будемъ равняться нулю, ея координаты относительно системы

$$O\Xi\Upsilon Z$$

будутъ

$$\xi = a_1,\ \eta = b_1,\ \zeta = c_1$$

и такъ какъ, кромѣ того, мы будемъ имѣть, что

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$

то формулы (46) примутъ видъ

$$0 = \frac{da_1}{dt} + qc_1 - rb_1$$

$$0 = \frac{db_1}{dt} + ra_1 - pc_1$$

$$0 = \frac{dc_1}{dt} + pb_1 - qa_1$$

и слѣдовательно мы получимъ, что

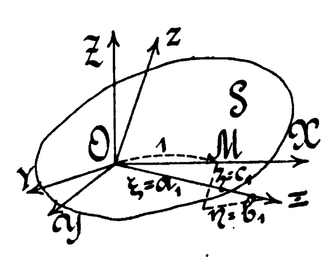
$$\left.\begin{aligned} a_1' &= rb_1 - qc_1 \\ b_1' &= pc_1 - ra_1 \\ c_1' &= qa_1 - pb_1 \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (49)$$

Точно также, предполагая точку M сначала на оси OY, потомъ на оси OZ, найдемъ, что

$$\left.\begin{array}{ll} a_2' = rb_2 - qc_2 & a_3' = rb_3 - qc_3 \\ b_2' = pc_2 - ra_2 & b_3' = pc_3 - ra_3 \\ c_2' = qa_2 - pb_2 & c_3' = qa_3 - pb_3 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (50)$$

Полученныя формулы, между прочимъ, даютъ выраженія величинъ

$$p, \ q \text{ и } r$$



Черт. 53.

въ зависимости отъ девяти косинусовъ и ихъ первыхъ производныхъ. Для того, чтобы получить эти выраженія, возьмемъ, напримѣръ, вторыя изъ формулъ каждой изъ трехъ полученныхъ группъ и помножимъ обѣ части первой изъ нихъ на c_1, второй на c_2 и третьей на c_3, а затѣмъ сложимъ ихъ между собой.

Такимъ образомъ мы получимъ, что

$$b_1'c_1 + b_2'c_2 + b_3'c_3 = p(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) - r(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3),$$

откуда найдемъ, что

$$p = b_1'c_1 + b_2'c_2 + b_3'c_3$$

и точно также будемъ имѣть

$$q = c_1'a_1 + c_2'a_2 + c_3'a_3$$
$$r = a_1'b_1 + a_2'b_2 + a_3'b_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Послѣднія же формулы непосредственно даютъ выраженіе величинъ

$$p, q, r$$

въ зависимости отъ Эйлеровыхъ угловъ подъ видомъ

$$\left.\begin{aligned} p &= Sin\,\psi\,Sin\,\theta\,\frac{d\varphi}{dt} + Cos\,\psi\,\frac{d\theta}{dt} \\ q &= Cos\,\psi\,Sin\,\theta\,\frac{d\varphi}{dt} - Sin\,\psi\,\frac{d\theta}{dt} \\ r &= Cos\,\theta\,\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (52)$$

Примѣръ 19. Опредѣлить скорости абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движенія точки, движущейся равномѣрно по меридіану сферической поверхности, центръ которой движется равномѣрно по окружности даннаго радіуса, описанной около нѣкоторой неподвижной точки O и которая равномѣрно вращается около своей оси, остающейся все время параллельной самой себѣ, при условіи, что, въ началѣ движенія, движущаяся точка находится въ сѣверномъ полюсѣ сферы, по которой она движется, а ось вращенія этой сферы находится въ одной плоскости съ перпендикуляромъ къ плоскости траекторіи ея центра, возстановленнымъ изъ точки O (см. примѣръ 17).

Называя радіусъ сферы, по которой движется точка, черезъ ρ_1 (черт. 54), а радіусъ окружности, описываемой ея центромъ, черезъ ρ, мы имѣли относительныя координаты движущейся точки:

$$\xi = \rho_1\,Sin\,\lambda t$$

$$\eta = 0$$

$$\zeta = \rho_1\,Cos\,\lambda t,$$

координаты полюса:

$$x_0 = \rho\,Cos\,\mu t$$

$$y_0 = \rho\,Sin\,\mu t$$

$$z_0 = 0,$$

Эйлеровы углы:

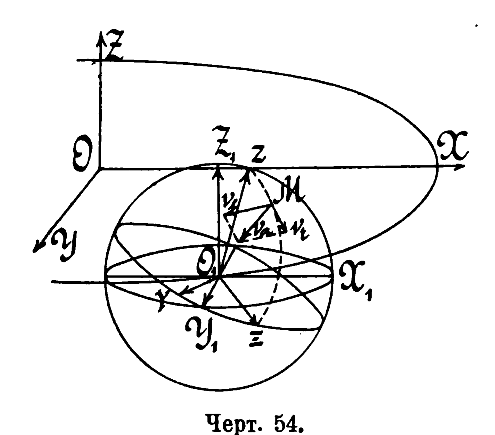
$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \frac{\pi}{2} - \nu t, \quad \theta = \alpha$$

и девять косинусовъ, опредѣляющихъ положеніе осей подвижной координатной системы относительно осей неподвижной системы:

$$a_1 = -\,Cos\,\nu t\,Cos\,\alpha; \quad a_2 = Sin\,\nu t; \quad a_3 = Cos\,\nu t\,Sin\,\alpha$$
$$b_1 = -\,Sin\,\nu t\,Cos\,\alpha; \quad b_2 = -\,Cos\,\nu t; \quad b_3 = Sin\,\nu t\,Sin\,\alpha$$
$$c_1 = Sin\,\alpha; \quad c_2 = 0; \quad c_3 = Cos\,\alpha$$

Принимая во вниманіе эти результаты, на основаніи формулъ (51), мы получимъ, что

$$p = -\,\nu\,Cos\,\nu t\,Cos\,\alpha\,Sin\,\alpha + \nu\,Cos\,\nu t\,Sin\,\alpha\,Cos\,\alpha = 0$$
$$q = 0$$
$$r = -\,\nu\,Sin^2\,\nu t\,Cos^2\,\alpha - \nu\,Cos^2\,\nu t - \nu\,Sin^2\nu t\,Sin^2\,\alpha = -\,\nu;$$



Черт. 54.

далѣе мы будемъ имѣть

$$v_r\,Cos\,(v_r, \Xi) = \rho_1\,\lambda\,Cos\,\lambda t$$
$$v_r\,Cos\,(v_r, \Upsilon) = 0$$
$$v_r\,Cos\,(v_r, Z) = -\,\rho_1\lambda\,Sin\,\lambda t,$$

откуда опредѣлимъ величину и направленіе скорости относительнаго движенія разсматриваемой нами точки. Мы будемъ имѣть, что

$$v_r = \rho_1 \lambda$$

и что

$$Cos\,(v_r\,,\,\Xi) = Cos\,\lambda t$$
$$Cos\,(v_r\,,\,\Upsilon) = 0$$
$$Cos\,(v_r\,,\,Z) = -\,Sin\,\lambda t$$

Величина и направленіе скорости переносснаго движенія, разсматриваемой нами точки, опредѣлятся по формуламъ

$$v_e\,Cos\,(v_e\,,\,\Xi) = \rho\,\mu\,Sin\,\mu t\;Cos\,\nu t\;Cos\,\alpha + \rho\,\mu\,Cos\,\mu t\;Sin\,\nu t$$
$$v_e\,Cos\,(v_e\,,\,\Upsilon) = \rho\,\mu\,Sin\,\mu t\;Sin\,\nu t\;Cos\,\alpha - \rho\,\mu\,Cos\,\mu t\;Cos\,\nu t -$$
$$-\,\nu\rho_1\,Sin\,\lambda t$$
$$v_e\,Cos\,(v_e\,,\,Z) = -\,\rho\,\mu\,Sin\,\mu t\;Sin\,\alpha$$

и мы будемъ имѣть, что

$$v_e =$$
$$= \sqrt{\rho^2\mu^2 + \rho_1^2\nu^2\,Sin^2\lambda t - 2\rho\rho_1\mu\nu\,Sin\,\lambda t\,\{Sin\,\mu t\,Sin\,\nu t\,Cos\,\alpha - Cos\,\mu t\,Cos\,\nu t\}}$$

и что

$$Cos\,(v_e\,,\,\Xi) =$$
$$= \frac{Sin\,\mu t\,Cos\,\nu t\,Cos\,\alpha + Cos\,\mu t\,Sin\,\nu t}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho_1\nu}{\rho\mu}\right)^2 Sin^2\lambda t - 2\,\frac{\rho_1\nu}{\rho\mu}\,Sin\,\lambda t\,\{Sin\,\mu t\,Sin\,\gamma t\,Cos\,\alpha - Cos\,\mu t\,Cos\,\nu t\}}}$$

$$Cos\,(v_e\,,\,\Upsilon) =$$
$$= \frac{Sin\,\mu t\,Sin\,\nu t\,Cos\,\alpha - Cos\,\mu t\,Cos\,\nu t - \frac{\rho_1\nu}{\rho\mu}\,Sin\,\lambda t}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho_1\nu}{\rho\mu}\right)^2 Sin^2\lambda t - 2\,\frac{\rho_1\nu}{\rho\mu}\,Sin\,\lambda t\,\{Sin\,\mu t\,Sin\,\nu t\,Cos\,\alpha - Cos\,\mu t\,Cos\,\nu t\}}}$$

$$Cos\,(v_e\,,Z) = \frac{-\,Sin\,\mu t\,Sin\,\alpha}{\sqrt{1+\left(\frac{\rho_1\nu}{\rho\mu}\right)^2 Sin^2\lambda t - 2\,\frac{\rho_1\nu}{\rho\mu}\,Sin\,\lambda t\,\{Sin\,\mu t\,Sin\,\nu t\,Cos\,\alpha - Cos\,\mu t\,Cos\,\nu t\}}}\,.$$

Зная же скорости относительнаго и переноснаго движеній точки, мы найдемъ и скорость ея абсолютнаго движенія.

50. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію формулъ

$$\left.\begin{aligned} v\,Cos\,(v,\Xi) &= x_0'a_1 + y_0'a_2 + z_0'a_3 + q\zeta - r\eta \\ v\,Cos\,(v,\Upsilon) &= x_0'b_1 + y_0'b_2 + z_0'b_3 + r\xi - p\zeta \\ v\,Cos\,(v,Z) &= x_0'c_1 + y_0'c_2 + z_0'c_3 + p\eta - q\xi \end{aligned}\right\}, \quad (53)$$

выражающихъ, какъ мы уже замѣтили выше, проекціи скоростей точекъ твердаго тѣла на оси неизмѣнно съ нимъ связанной координатной системы

$$O_1\,\Xi\Upsilon Z,$$

но предварительно установимъ нѣкоторыя опредѣленія, касающіяся движенія твердаго тѣла вообще.

Поступательнымъ движеніемъ твердаго тѣла будемъ называть такое его движеніе, при которомъ векторы перемѣщенія всѣхъ его точекъ, за любой промежутокъ времени, геометрически равны между собой.

Такимъ образомъ, полагая, что нѣкоторое тѣло S движется поступательно и что въ нѣкоторый моментъ времени t какія-нибудь его точки занимаютъ положенія

$$M,\ N,\ P$$

(черт. 55), а въ моменты времени t_1 и t_2 тѣ же точки занимаютъ соотвѣтственно положенія

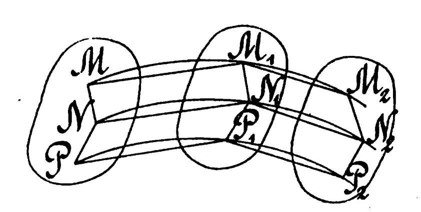
$$M_1,\ N_1,\ P_1$$

и

$$M_2,\ N_2,\ P_2,$$

мы будемъ имѣть

$$\overline{MM_1} = \overline{NN_1} = \overline{PP} = \cdot\ \cdot\ \ \cdot\ \cdot$$
$$\overline{M_1M_2} = \overline{N_1N_2} = \overline{P_1P_2} = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$



Черт. 55.

Теорема. *При поступательномъ движенiи твердаго тѣла, прямая, соединяющая какiя-нибудь двѣ его точки, остается параллельной самой себѣ.*

Въ самомъ дѣлѣ, соединяя между собой точки M, N и P и точно также M_1, N_1, P_1 и т. д., на основанiи теоремы, что прямыя, соединяющiя концы двухъ равныхъ и взаимно-параллельныхъ отрѣзковъ, сами равны между собой и взаимно-параллельны, мы будемъ имѣть

$$\overline{MN} = \overline{M_1N_1} = \overline{M_2N_2}$$
$$\overline{PN} = \overline{P_1N_1} = \overline{P_2N_2},$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

Слѣдствiе. *При поступательномъ движенiи твердаго тѣла, всякая плоскость, проведенная въ твердомъ тѣлѣ, остается параллельной самой себѣ.*

Изъ предыдущей теоремы слѣдуетъ, что, при поступательномъ движенiи твердаго тѣла, оси, неизмѣнно съ нимъ связанной координатной системы, остаются параллельными самимъ

себѣ, а слѣдовательно, при этомъ движеніи, девять косинусовъ остаются постоянными и

$$p = q = r = 0$$

Теорема. *При поступательномъ движеніи твердаго тѣла, скорости всѣхъ его точекъ геометрически равны между собой.*

Въ самомъ дѣлѣ, если въ формулахъ (48) мы положимъ, что

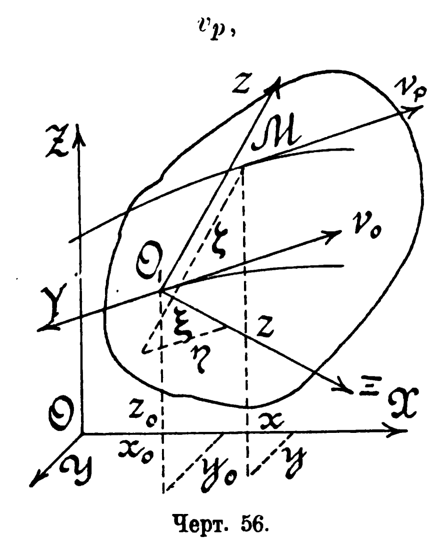
$$p = q = r = 0,$$

то ихъ правыя части будутъ представлять изъ себя проекціи на оси системы

$$O_1 \Xi \Upsilon Z$$

скорости нѣкоторой точки M (чер. 56) твердаго тѣла, при его поступательномъ движеніи, и если назовемъ эту скорость черезъ

$$v_p,$$



Черт. 56.

то будемъ имѣть

$$v_p \, Cos(v_p, \ \Xi) = x_0' a_1 + y_0' a_2 + z_0' a_3$$
$$v_p \, Cos(v_p, \ \Upsilon) = x_0' b_1 + y_0' b_2 + z_0' b_3$$
$$v_p \, Cos(v_p, \ Z) = x_0' c_1 + y_0' c_2 + z_0' c_3,$$

а такъ какъ

$$x'_0, \; y'_0, \; z'_0$$

суть проекціи на оси системы

$$OXYZ$$

скорости

$$v_0$$

точки O_1, то

$$x_0'a_1 + y_0'a_2 + z_0'a_3 = v_0 \, Cos\,(v_0, \; \Xi)$$
$$x_0'b_1 + y_0'b_2 + z_0'b_3 = v_0 \, Cos\,(v_0, \; \Upsilon)$$
$$x_0'c_1 + y_0'c_2 + z_0'c_3 = v_0 \, Cos\,(v_0, Z)$$

и слѣдовательно

$$v_p \, Cos\,(v_p, \; \Xi) = v_0 \, Cos\,(v_0, \; \Xi)$$
$$v_p \, Cos\,(v_p, \; \Upsilon) = v_0 \, Cos\,(v_0, \; \Upsilon)$$
$$v_p \, Cos\,(v_p, Z) = v_0 \, Cos\,(v_0, Z)$$

и

$$\overline{v_p} = \overline{v_0},$$

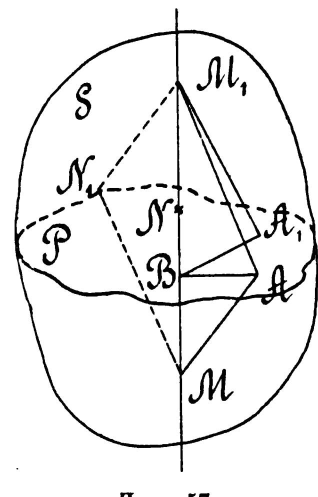
а такъ какъ точка M есть произвольная точка твердаго тѣла, то предложенная теорема доказана.

51. **Вращательнымъ движеніемъ** твердаго тѣла мы будемъ называть такое его движеніе, при которомъ одна изъ его точекъ остается неподвижной.

Теорема. *Если, во время движенія твердаго тѣла, какія-нибудь двѣ его точки остаются неподвижными, то остаются неподвижными и всѣ точки прямой, проходящей черезъ эти двѣ точки, а всѣ остальныя точки тѣла движутся по окружностямъ, расположеннымъ въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ прямой, проходящей черезъ неподвижныя точки и имѣющимъ центры на этой прямой.*

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что двѣ точки M и M_1 нѣкотораго твердаго тѣла S неподвижны (черт. 57), проведемъ черезъ эти точки прямую и возьмемъ на ней нѣкоторую точку N. Эта точка не можетъ перемѣщаться вдоль прямой MM_1, ибо въ такомъ случаѣ измѣнилось бы разстояніе разсматриваемой точки отъ точекъ M и M_1; точка N не можетъ сойти съ прямой MM_1, ибо, если бы она сошла съ этой прямой, перейдя, напримѣръ, въ положеніе N_1, то мы имѣли бы, что

$$MN_1 + N_1M_1 > MM_1$$



Черт. 57.

и слѣдовательно имѣли бы, что или

$$MN_1 > MN$$

или, что

$$M_1N_1 > M_1N,$$

откуда слѣдовало бы, что взаимное разстояніе между точками твердаго тѣла опять нарушилось бы. Такимъ образомъ, первая часть предложенной теоремы доказана. Для доказательства

второй части этой теоремы, возьмемъ нѣкоторую точку A, проведемъ черезъ нее плоскость P, перпендикулярную къ прямой MM_1 и положимъ, что эта плоскость пересѣкаетъ прямую MM_1 въ точкѣ B.

Точка A не можетъ выйти изъ плоскости P, ибо, если бы она вышла изъ этой плоскости, перейдя въ положеніе A_1, то мы имѣли бы, что

$$M_1 A > M_1 A_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

такъ какъ въ треугольникахъ BAM_1 и $BA_1 M_1$ сторона BM_1 общая и, кромѣ того,

$$BA = BA_1,$$

а

$$\angle M_1 BA > \angle M_1 BA_1,$$

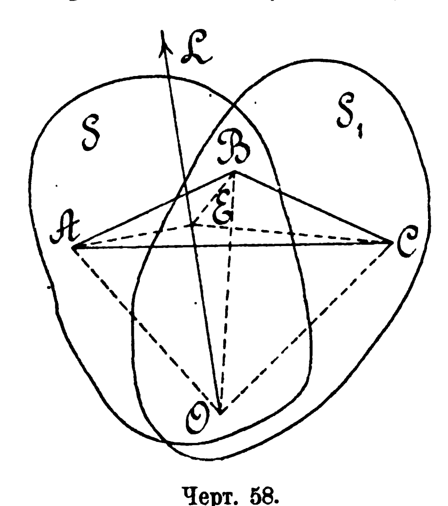
неравенство же (54) противорѣчитъ опредѣленію твердаго тѣла. Такимъ образомъ, точка A должна все время находиться въ плоскости P, а такъ какъ эта точка не можетъ измѣнить своего разстоянія отъ точки B, то она будетъ двигаться по окружности, имѣющей своимъ центромъ точку B, и наша теорема, слѣдовательно, доказана вполнѣ.

Движеніе твердаго тѣла, имѣющаго двѣ неподвижныя точки, на основаніи предыдущей теоремы, мы будемъ называть **вращеніемъ** этого **тѣла около неподвижной оси.**

Теорема Даламбера. *Перемѣщеніе твердаго тѣла, имѣющаго неподвижную точку, за любой промежутокъ времени можетъ быть воспроизведено вращеніемъ этого тѣла около нѣкоторой неподвижной оси, проходящей черезъ его неподвижную точку.*

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что нѣкоторое твердое тѣло, имѣющее неподвижную точку O, въ нѣкоторый моментъ времени t занимаетъ положеніе S (черт. 58), а въ моментъ t_1 черезъ промежутокъ времени Δt положеніе S_1 и пусть нѣкоторая точка этого тѣла, находившаяся въ A, при его первомъ

положеніи, за промежутокъ времени Δt перейдетъ въ положеніе B, а его точка, находившаяся въ B въ моментъ времени t, перейдетъ за этотъ промежутокъ въ положеніе C. Проведя плоскость черезъ точки A, B и C, опустимъ на нее



Черт. 58.

перпендикуляръ OL изъ точки O, назовемъ точку встрѣчи этого перпендикуляра съ построенной плоскосью черезъ E и соединимъ точки A, B и C между собой и съ точками E и O.

Такъ какъ, на основаніи свойства твердаго тѣла не измѣнять разстоянія между его точками,

$$AB = BC$$

и

$$OA = OB = OC,$$

то

$$EA = EB = EC,$$

а слѣдовательно

$$\Delta AEB = \Delta BEC$$

и

$$\angle AEB = \angle BEC$$

Изъ равенства же этихъ угловъ мы заключаемъ, что переходъ разсматриваемаго нами тѣла изъ положенія S въ положеніе S_1 можетъ быть осуществленъ его вращеніемъ на уголъ

$$\theta = AEB$$

около оси

$$OL$$

и слѣдовательно предложенная теорема доказана.

Неподвижную прямую, вращеніемъ около которой можетъ быть воспроизведено перемѣщеніе твердаго тѣла за нѣкоторый промежутокъ времени, при его вращательномъ движеніи, будемъ называть **среднею осью вращенія** даннаго тѣла за разсматриваемый промежутокъ времени.

Угловымъ перемѣщеніемъ твердаго тѣла за данный промежутокъ времени, при его вращательномъ движеніи, будемъ называть уголъ, поворотомъ на который около средней оси, отвѣчающей разсматриваемому промежутку времени, можетъ быть воспроизведено перемѣщеніе даннаго тѣла за этотъ промежутокъ времени.

Средней угловой скоростью тѣла за данный промежутокъ времени будемъ называть отношеніе его угловаго перемѣщенія за этотъ промежутокъ времени къ самому промежутку.

Предѣльное положеніе средней оси вращенія твердаго тѣла за безконечно малый промежутокъ времени, прилегающій къ данному моменту, будемъ называть **мгновенной осью вращенія** даннаго тѣла въ этотъ моментъ времени.

Предѣлъ средней угловой скорости твердаго тѣла за безконечно малый промежутокъ времени, прилегающій къ данному моменту, будемъ называть **угловой скоростью** даннаго твердаго тѣла въ этотъ моментъ времени.

Такимъ образомъ, полагая, что

$$J_{cp}$$

есть средняя ось вращенія нѣкотораго твердаго тѣла S (черт. 59) за промежутокъ времени

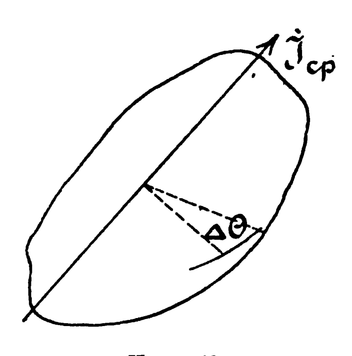
$$\Delta t,$$

а

$$\Delta\theta$$

его угловое перемѣщеніе за этотъ промежутокъ и называя среднюю угловую скорость тѣла за разсматриваемый промежутокъ времени черезъ

$$\omega_{cp},$$



Черт. 59.

а угловую скорость въ моментъ времени t, къ которому этотъ промежутокъ прилегаетъ, черезъ

$$\omega,$$

мы будемъ имѣть, что

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

и что

$$\omega = lim\,\omega_{cp} = lim\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда твердое тѣло вращается около неподвижной оси, мы будемъ имѣть, что

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

52. **Чтобы установить единицу угловой скорости**, разсмотримъ частный случай вращенія твердаго тѣла около неподвижной оси, а именно его **равномѣрное** вращеніе, разумѣя подъ этимъ вращеніемъ такое, во все время котораго угловая скорость твердаго тѣла остается постоянной.

При этомъ вращеніи твердаго тѣла, мы, слѣдовательно, будемъ имѣть, что

$$\omega = Const$$

и, слѣдовательно, получимъ, что

$$\omega = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0}$$

Полагая же въ этомъ равенствѣ

$$\theta - \theta_0 = 1 \text{ и } t - t_0 = 1,$$

найдемъ, что и

$$\omega = 1$$

и такимъ образомъ будемъ имѣть, что **единица угловой скорости** есть угловая скорость такого равномѣрнаго вращенія твердаго тѣла около неподвижной оси, при которомъ въ единицу времени тѣло поворачивается на уголъ, принятый за единицу угловъ.

Единица угловой скорости, слѣдовательно, есть сложная единица и символомъ ея служитъ

$$\frac{1}{T} = T^{-1};$$

если, напримѣръ, за единицу времени принята секунда, то единицей угловой скорости будетъ единица, дѣленная на секунду.

Теорема. *При вращеніи твердаго тѣла около неподвижной оси, скорость каждой изъ его точекъ, не лежащихъ на этой оси, равняется произведенію угловой скорости на разстояніе данной точки отъ оси вращенія.*

Въ самомъ дѣлѣ, называя векторъ перемѣщенія. точки M за промежутокъ времени Δt, т. е. хорду дуги MM_1 (черт. 60) черезъ

$$\overline{\Delta s},$$

а эту дугу черезъ

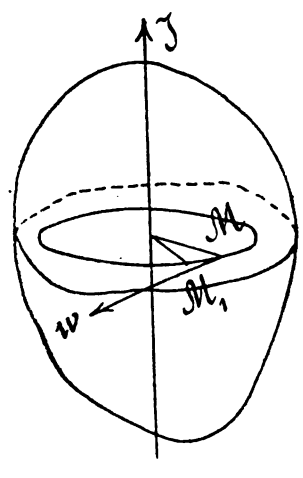
$$\Delta s$$

и обозначая скорость точки M въ моментъ времени t черезъ

$$w,$$

мы будемъ имѣть, что

$$w = lim\,\frac{\overline{\Delta s}}{\Delta t} = lim\,\frac{\Delta s}{\Delta t} = lim\, r\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\,\frac{d\theta}{dt} = r\omega,$$



Черт. 60.

что и доказываетъ предложенную теорему.

54. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію скоростей различныхъ точекъ твердаго тѣла, при его вращательномъ движеніи. Полагая, что неподвижная точка твердаго тѣла принята за начала координатной системы, неизмѣнно связанной съ этимъ тѣломъ, мы видимъ, что координаты этого начала (черт. 61)

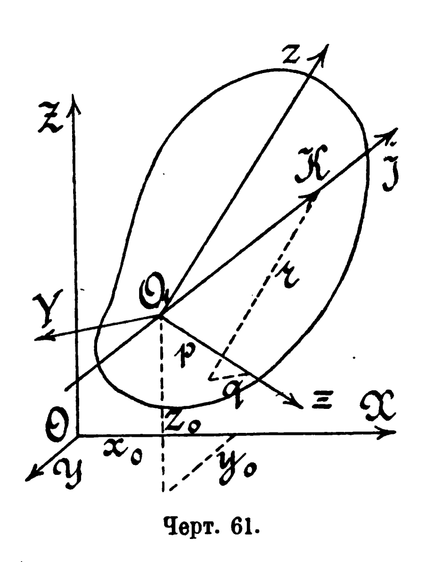
$$x_0,\ y_0,\ z_0$$

суть постоянныя величины, и, слѣдовательно, если мы назовемъ скорость какой-нибудь точки твердаго тѣла при его вращательномъ движеніи черезъ

$$w,$$

то, на основаніи формулъ (48), получимъ проекціи этой скорости на оси системы

$$O_1 \Xi \Upsilon Z$$



Черт. 61.

подъ видомъ

$$\left.\begin{aligned} w\, Cos\,(w, \Xi\,) &= q\zeta - r\eta \\ w\, Cos\,(w, \Upsilon) &= r\xi - p\zeta \\ w\, Cos\,(w, Z) &= p\eta - q\xi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Полагая въ этихъ формулахъ

$$w = O,$$

мы видимъ, что въ каждый моментъ времени точки твердаго тѣла, скорости которыхъ равняются нулю, лежатъ на прямой, опредѣляемой уравненіями

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r}.$$

Эта прямая и является, слѣдовательно, въ разсматриваемый моментъ времени мгновенной осью твердаго тѣла, о которой было упомянуто выше, здѣсь же мы только получили ея уравненія относительно координатной системы

$$O_1 \Xi \Upsilon Z.$$

Что касается скорости какой-нибудь точки M твердаго тѣла, которая не лежитъ въ данный моментъ времени на его мгновенной оси и которая имѣетъ своими координатами

$$\xi, \ \eta, \ \zeta,$$

то формулы (55) показываютъ, что она является моментомъ, относительно разсматриваемой точки, вектора $O_1 K$, лежащаго на мгновенной оси и имѣющаго своими проекціями на оси координатной системы

$$O_1 \Xi \Upsilon Z$$

отрѣзки

$$p, \ q \text{ и } r,$$

ибо, проведя изъ точки M оси

$$\Xi_1, \ \Upsilon_1, \ Z_1,$$

соотвѣтственно параллельныя осямъ упомянутой системы, на основаніи формулъ (55), мы видимъ, что

$$w \, Cos\,(w, \Xi) = M_{\Xi_1}(O_1 K)$$

$$w \, Cos\,(w, \Upsilon) = M_{\Upsilon_1}(O_1 K)$$

$$w \, Cos\,(w, Z) = M_{Z_1}(O_1 K)$$

и такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что

$$w = M_M(O_1K)$$

Называя разстояніе точки M отъ мгновенной оси черезъ

$$\rho,$$

мы, слѣдовательно, будемъ имѣть, что

$$w = \rho \cdot O_1K \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (56)$$

Съ другой стороны, принимая во вниманіе теорему предыдущаго §, мы видимъ, что скорость точки M, въ соотвѣтствующій моментъ времени, т. е когда ось O_1J является неподвижной, должна опредѣляться формулой

$$w = \rho\omega, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (57)$$

гдѣ

$$\omega$$

есть угловая скорость нашего твердаго тѣла въ разсматриваемый моментъ времени.

Сравнивая же между собой равенства (56) и (57), мы находимъ, что

$$\overline{O_1K} = \omega$$

и такимъ образомъ видимъ, что величины

$$p, \; q \text{ и } r$$

являются проекціями на оси координатной системы, неизмѣнно связанной съ твердымъ тѣломъ, его угловой скорости

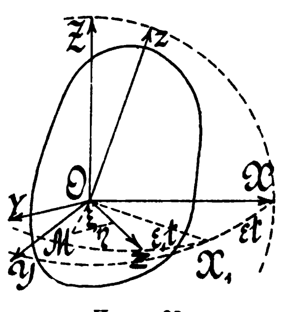
$$\omega,$$

которая въ каждый моментъ времени направлена по, соотвѣтствующей этому моменту, мгновенной оси.

Полученные результаты позволяютъ намъ высказать слѣдующую теорему, опредѣляющую скорости точекъ твердаго тѣла при его вращательномъ движеніи.

Теорема. *При вращательномъ движеніи твердаго тѣла, въ каждый моментъ времени въ немъ имѣется неподвижная ось, проходящая черезъ его неподвижную точку, по которой направлена его угловая скорость въ этотъ моментъ времени, и скорость каждой точки тѣла, не лежащей на этой оси, является моментомъ, относительно этой точки, угловой скорости разсматриваемаго тѣла.*

Примѣръ 20. Опредѣлить уравненія мгновенной оси, величину угловой скорости и скорость точки M (чер. 62) твердаго тѣла, лежащей въ плоскости осей $O\Xi$ и $O\Upsilon$ на



Черт. 62.

прямой, дѣлящей уголъ между этими осями пополамъ, и въ разстояніи единицы длины отъ точки O, при условіи, что твердое тѣло вращается около этой точки и что его вращеніе задано, посредствомъ заданія Эйлеровыхъ угловъ, уравненіями

$$\varphi = \varepsilon t$$
$$\psi = \varepsilon_1 t$$
$$\theta = \delta$$

Мы будемъ имѣть

$$p = \varepsilon \, Sin \, \varepsilon_1 t \, Sin \, \delta$$
$$q = \varepsilon \, Cos \, \varepsilon_1 t \, Sin \, \delta$$
$$r = \varepsilon \, Cos \, \delta + \varepsilon_1$$

и, слѣдовательно, получимъ уравненія мгновенной оси подъ видомъ

$$\frac{\xi}{Sin\,\varepsilon_1 t\,Sin\,\delta} = \frac{\eta}{Cos\,\varepsilon_1 t\,Sin\,\delta} = \frac{\zeta}{Cos\,\delta + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}}$$

и угловую скорость

$$\omega = \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon_1{}^2 + 2\varepsilon\varepsilon_1\,Cos\,\delta}$$

Имѣя въ виду, далѣе, что координаты точки M

$$\xi = \eta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } \zeta = 0,$$

мы найдемъ проекціи на оси системы

$$O\Xi\Upsilon Z$$

скорости точки M по формуламъ

$$w\,Cos\,(w\,,\Xi) = q\zeta - r\eta = -(\varepsilon\,Cos\,\delta + \varepsilon_1)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w\,Cos\,(w\,,\Upsilon) = r\xi - p\zeta = (\varepsilon\,Cos\,\delta + \varepsilon_1)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w\,Cos\,(w\,,Z) = p\eta - q\xi = \varepsilon\,Sin\,\delta\,(Sin\,\varepsilon_1 t + Cos\,\varepsilon_1 t)\frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда получимъ, что

$$w = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\,(\varepsilon\,Cos\,\delta + \varepsilon_1)^2 + \varepsilon^2\,Sin^2\,\delta\,(Sin\,\varepsilon_1 t + Cos\,\varepsilon_1 t)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\varepsilon^2\,(1 + Cos^2\delta) + 2\varepsilon_1{}^2 + 4\varepsilon\varepsilon_1\,Cos\delta + \varepsilon^2\,Sin^2\delta\,Sin\,2\varepsilon_1\,t}$$

и кромѣ того будемъ имѣть, что

$$Cos(w, \Xi) = -\frac{\varepsilon\, Cos\,\delta + \varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon^2(1 + Cos^2\delta) + 2\varepsilon_1^2 + 4\varepsilon\varepsilon_1\, Cos\,\delta + \varepsilon^2\, Sin^2\delta\, Sin\, 2\varepsilon_1 t}}$$

$$Cos(w, \Upsilon) = \frac{\varepsilon\, Cos\,\delta + \varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon^2(1 + Cos^2\delta) + 2\varepsilon_1^2 + 4\varepsilon\varepsilon_1\, Cos\,\delta + \varepsilon^2\, Sin^2\delta\, Sin\, 2\varepsilon_1 t}}$$

$$Cos(w, Z) = \frac{\varepsilon\, Sin\,\delta\,(Sin\,\varepsilon_1 t + Cos\,\varepsilon_1 t)}{\sqrt{\varepsilon^2(1 + Cos^2\delta) + 2\varepsilon_1^2 + 4\varepsilon\varepsilon_1\, Cos\,\delta + \varepsilon^2\, Sin^2\delta\, Sin\, 2\varepsilon_1 t}}$$

Такимъ образомъ мы найдемъ скорость точки M, какъ по величинѣ, такъ и по направленію.

55. **Проекціи угловой скорости твердаго тѣла на оси неподвижной координатной системы.** Называя эти проекціи на оси системы

$$OXYZ$$

соотвѣтственно черезъ

$$P,\ Q,\ R,$$

на основаніи равенства

$$\bar{\omega} = \bar{p} + \bar{q} + \bar{r},$$

мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} P &= pa_1 + qb_1 + rc_1 \\ Q &= pa_2 + qb_2 + rc_2 \\ R &= pa_3 + qb_3 + rc_3 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Подставляя въ первую изъ этихъ формулъ вмѣсто

$$a_1,\ b_1,\ c_1$$

ихъ величины, по формуламъ (29) главы IV, найдемъ

$$P = p\,(b_2c_3 - b_3c_2) + q\,(c_2a_3 - c_3a_2) + r\,(a_2b_3 - a_3b_2)$$

или

$$P = a_3\,(qc_2 - rb_2) + b_3\,(ra_2 - pc_2) + c_3\,(pb_2 - qa_2)$$

и, слѣдовательно, вслѣдствіе равенствъ (50), получимъ

$$P = -a_3 a_2' - b_3 b_2' - c_3 c_2',$$

а принимая во вниманіе, что

$$a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0$$

и что, слѣдовательно,

$$a_2' a_3 + b_2' b_3 + c_2' c_3 = -a_2 a_3' - b_2 b_3' - c_2 c_3',$$

окончательно получимъ

$$P = a_2 a_3' + b_2 b_3' + c_2 c_3'$$

и точно такъ же найдемъ

$$\left.\begin{aligned} Q &= a_3 a_1' + b_3 b_1' + c_3 c_1' \\ R &= a_1 a_2' + b_1 b_2' + c_1 c_2' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (59)$$

Имѣя въ виду формулы (34), мы получимъ, что

$$\left.\begin{aligned} P &= Sin\,\varphi\, Sin\,\theta \frac{d\psi}{dt} + Cos\,\varphi \frac{d\theta}{dt} \\ Q &= -Cos\,\varphi\, Sin\,\theta \frac{d\psi}{dt} + Sin\,\varphi \frac{d\theta}{dt} \\ R &= Cos\,\theta \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (59 \text{ bis})$$

56. Проекціи на оси неподвижной координатной системы скорости точки твердаго тѣла, при его вращательномъ движеніи.

Дифференцируя формулы (25) главы IV въ предположеніи, что

$$x_0, \; y_0, \; z_0$$

постоянныя, такъ какъ точка O_1 принята за неподвижную точку тѣла, и что

$$\xi, \; \eta, \; \zeta$$

тоже постоянныя, какъ координаты точки твердаго тѣла

относительно, неизмѣнно съ нимъ связанной, координатной системы, мы будемъ имѣть

$$x' = w \, Cos\,(w, x) = \xi a_1' + \eta b_1' + \zeta c_1'$$
$$y' = w \, Cos\,(w, y) = \xi a_2' + \eta b_2' + \zeta c_2'$$
$$z' = w \, Cos\,(w, z) = \xi a_3' + \eta b_3' + \zeta c_3'$$

Подставляя затѣмъ въ первую изъ этихъ формулъ вмѣсто

$$\xi, \; \eta, \; \zeta$$

ихъ величины, на основаніи формулъ (25 bis), получимъ

$$w \, Cos\,(w,x) = (x - x_0)\,(a_1 a_1' + b_1 b_1' + c_1 c_1') +$$
$$+ (y - y_0)\,(a_2 a_1' + b_2 b_1' + c_2 c_1') + (z - z_0)\,(a_3 a_1' + b_3 b_1' + c_3 c_1'),$$

откуда, принимая во вниманіе формулы (26) и имѣя въ виду, что

$$a_1 a_1' + b_1 b_1' + c_1 c_1' = 0,$$

такъ какъ

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1,$$

окончательно получимъ

$$w \, Cos\,(w, x) = Q\,(z - z_0) - R\,(y - y_0)$$

и точно такъ же будемъ имѣть

$$w \, Cos\,(w, y) = R\,(x - x_0) - P\,(z - z_0)$$
$$w \, Cos\,(w, z) = P\,(y - y_0) - Q\,(x - x_0)$$

(последние три формулы объединены скобкой) . . (60)

Полагая въ этихъ формулахъ

$$w = 0,$$

найдемъ уравненія мгновенной оси, относительно неподвижной координатной системы, подъ видомъ

$$\frac{x - x_0}{P} = \frac{y - y_0}{Q} = \frac{z - z_0}{R}.$$

57. Мы видѣли, что, при вращательномъ движеніи твердаго тѣла, въ каждый моментъ времени въ немъ имѣется нѣкоторая неподвижная ось, которую мы назвали мгновенной осью. Съ теченіемъ времени мгновенная ось измѣняетъ свое положеніе, какъ внутри твердаго тѣла, такъ и въ пространствѣ.

Коническую поверхность, представляющую геометрическое мѣсто мгновенныхъ осей въ пространствѣ, будемъ называть **неподвижнымъ аксоидомъ мгновенныхъ осей**, а коническую поверхность, представляющую геометрическое мѣсто мгновенныхъ осей внутри твердаго тѣла, будемъ называть **подвижнымъ аксоидомъ мгновенныхъ осей.**

Теорема Пуансо. *При вращательномъ движеніи твердаго тѣла, подвижный аксоидъ катится безъ скольженія по неподвижному.*

Во время движенія твердаго тѣла, подвижный аксоидъ, будучи неизмѣнно связанъ съ твердымъ тѣломъ, движется въ пространствѣ такъ, что его вершина все время находится въ вершинѣ неподвижнаго аксоида и въ каждый моментъ времени оба эти аксоида имѣютъ общую производящую. Для доказательства предложенной теоремы, надо показать, что, если мы на мгновенныхъ осяхъ отложимъ отъ неподвижной точки соотвѣтствующія мгновенныя угловыя скорости, то полученныя вслѣдствіе этого кривыя ABC на подвижномъ аксоидѣ и ADE на неподвижномъ (черт. 63) будутъ въ ихъ общей точкѣ A имѣть общую касательную и ихъ элементарныя дуги, отвѣчающія одному и тому же безконечно малому промежутку времени, будутъ равны между собой.

Назовемъ элементарную дугу неподвижнаго аксоида, начинающуюся въ точкѣ A, черезъ

$$ds,$$

а элементарную дугу подвижнаго аксоида, начинающуюся въ той же точкѣ, черезъ

$$d\sigma$$

Мы будемъ имѣть

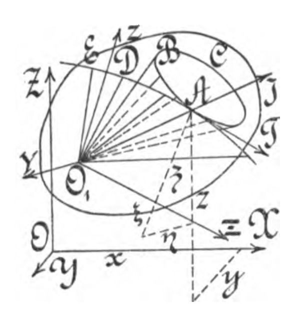
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2,$$

а такъ какъ

$$x = P + x_0,\ y = \varphi + y_0,\ z = R + z_0$$

и

$$\xi = p,\ \eta = q,\ \zeta = r,$$



Черт. 63.

то, принимая во вниманіе, что

$$x_0,\ y_0,\ z_0$$

суть постоянныя величины, мы будемъ имѣть, что

$$ds^2 = (P'^2 + Q'^2 + R'^2)\, dt^2$$
$$d\sigma^2 = (p'^2 + q'^2 + r'^2)\, dt.$$

Разсматривая правыя части этихъ равенствъ, мы видимъ, что трехчлены, стоящіе въ нихъ въ скобкахъ, равны между собой. Въ самомъ себѣ, на основаніи формулъ (58), мы будемъ имѣть

$$P' = p'a_1 + q'b_1 + r'c_1 + pa'_1 + qb'_1 + rc'_1$$
$$Q' = p'a_2 + q'b_2 + r'c_2 + pa'_2 + qb'_2 + rc'_2$$
$$R' = p'a_3 + q'b_3 + r'c_3 + pa'_3 + qb'_3 + rc'_3,$$

а такъ какъ, въ силу равенствъ (49),

$$\left.\begin{aligned} pa_1' + qb_1' + rc_1' &= 0 \\ pa_2' + qb_2' + rc_2' &= 0 \\ pa_3' + qb_3' + rc_3' &= 0 \end{aligned}\right\},$$

то

$$\left.\begin{aligned} P' &= p'a_1 + q'b_1 + r'c_1 \\ Q' &= p'a_2 + q'b_2 + r'c_2 \\ R' &= p'a_3 + q'b_3 + r'c_3 \end{aligned}\right\} \quad . \qquad . \quad (62)$$

Возвышая же эти выраженія въ квадратъ и складывая ихъ между собой, получимъ

$$P'^2 + Q'^2 + R'^2 = p'^2 + q'^2 + r'^2$$

Такимъ образомъ мы будемъ имѣть, что

$$ds = d\sigma$$

Называя далѣе касательную въ точкѣ A къ кривой ABC, лежащей на неподвижномъ аксоидѣ, черезъ

$$T,$$

а касательную въ той же точкѣ къ кривой ADE, лежащей на подвижномъ аксоидѣ, черезъ

$$\tau$$

и полагая, для краткости письма, что

$$P'^2 + Q'^2 + R'^2 = K^2,$$

мы можемъ написать, что

$$Cos\,(T, X) = \frac{dx}{ds} = \frac{P'}{K} \qquad Cos\,(\tau, \Xi) = \frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{p'}{k}$$

$$Cos\,(T, Y) = \frac{dy}{ds} = \frac{Q'}{K} \qquad Cos\,(\tau, \Upsilon) = \frac{d\eta}{d\sigma} = \frac{q'}{k}$$

$$Cos\,(T, Z) = \frac{dz}{ds} = \frac{R'}{K} \qquad Cos\,(\tau, Z) = \frac{d\zeta}{d\sigma} = \frac{r'}{k}$$

и, слѣдовательно, что

$$Cos(\tau, X) = \frac{p'}{k} a_1 + \frac{q'}{k} b_1 + \frac{r'}{k} c_1$$

$$Cos(\tau, Y) = \frac{p'}{k} a_2 + \frac{q'}{k} b_2 + \frac{r'}{k} c_2$$

$$Cos(\tau, Z) = \frac{p'}{k} a_3 + \frac{q'}{k} b_3 + \frac{r'}{k} c_3,$$

откуда, на основаніи формулъ (62), видимъ, что

$$Cos(T, X) = Cos(\tau, X)$$

$$Cos(T, Y) = Cos(\tau, Y)$$

$$Cos(T, Z) = Cos(\tau, Z)$$

и, слѣдовательно, что касательныя AT и $A\tau$ совпадаютъ между собой, и наша теорема такимъ образомъ доказана.

Замѣтимъ, что, для того чтобы вывести уравненіе подвижнаго аксоида твердаго тѣла, надо исключить t изъ уравненій его мгновенной оси, относительно координатной системы, неизмѣнно связанной съ твердымъ тѣломъ, т. е. изъ уравненій

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r}.$$

Для того же, чтобы вывести уравненіе неподвижнаго аксоида твердаго тѣла, надо исключить t изъ уравненій мгновенной оси, относительно неподвижной въ пространствѣ координатной системы, т. е. изъ уравненій

$$\frac{x - x_0}{P} = \frac{y - y_0}{Q} = \frac{z - z_0}{R}.$$

Примѣръ 21. Вывести уравненія неподвижнаго и подвижнаго аксоидовъ твердаго тѣла, вращающагося около неподвижной точки, при условіи, что его вращеніе задано, посредствомъ заданія Эйлеровыхъ угловъ, уравненіями

$$\varphi = \varepsilon t$$

$$\psi = \varepsilon_1 t$$

$$\theta = \delta$$

Мы видѣли, что въ этомъ случаѣ проекціи на оси системы

$$O_1\,\Xi\,\Upsilon\,Z$$

угловой скорости будутъ

$$p = \varepsilon\,Sin\,\varepsilon_1 t\,Sin\,\delta$$
$$q = \varepsilon\,Cos\,\varepsilon_1 t\,Sin\,\delta$$
$$r = \varepsilon\,Cos\,\delta + \varepsilon,$$

и что уравненія мгновенной оси будутъ имѣть видъ

$$\frac{\xi}{Sin\,\varepsilon_1 t\,Sin\,\delta} = \frac{\eta}{Cos\,\varepsilon_1 t\,Sin\,\delta} = \frac{\zeta}{Cos\,\delta + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}}.$$

Имѣя эти уравненія, мы можемъ написать, что

$$\xi\,(\varepsilon\,Cos\,\delta + \varepsilon_1) = \zeta\,\varepsilon\,Sin\,\varepsilon_1 t\,Sin\,\delta$$
$$\eta\,(\varepsilon\,Cos\,\delta + \varepsilon_1) = \zeta\,\varepsilon\,Cos\,\varepsilon_1 t\,Sin\,\delta,$$

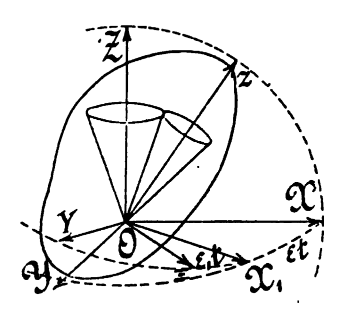
откуда, возвышая полученныя равенства въ квадратъ и складывая ихъ между собою, получимъ

$$(\xi^2 + \eta^2)\,(\varepsilon\,Cos\,\delta + \varepsilon_1)^2 = \zeta^2\,\varepsilon^2\,Sin^2\,\delta$$

или

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{\varepsilon^2\,Sin^2\,\delta} - \frac{\zeta^2}{(\varepsilon\,Cos\,\delta + \varepsilon_1)^2} = 0.$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ подвижнымъ аксоидомъ является конусъ вращенія около оси OZ (черт. 64).



Черт. 64.

Далѣе, принимая во вниманіе, что въ разсматриваемомъ нами случаѣ

$$a_1 = Cos\,\varepsilon t\, Cos\,\varepsilon_1 t - Sin\,\varepsilon t\, Sin\,\varepsilon_1 t\, Cos\,\delta$$
$$b_1 = - Cos\,\varepsilon t\, Sin\,\varepsilon_1 t - Sin\,\varepsilon t\, Cos\,\varepsilon_1 t\, Cos\,\delta$$
$$c_1 = Sin\,\varepsilon t\, Sin\,\delta$$
$$a_2 = Sin\,\varepsilon t\, Sin\,\varepsilon_1 t + Cos\,\varepsilon t\, Cos\,\varepsilon_1 t\, Cos\,\delta$$
$$b_2 = - Sin\,\varepsilon t\, Sin\,\varepsilon_1 t + Cos\,\varepsilon t\, Cos\,\varepsilon_1 t\, Cos\,\delta$$
$$c_2 = - Cos\,\varepsilon t\, Sin\,\delta$$
$$a_3 = Sin\,\varepsilon_1 t\, Sin\,\delta$$
$$b_3 = Cos\,\varepsilon_1 t\, Sin\,\delta$$
$$c_3 = Cos\,\delta,$$

на основаніи равенствъ (58), мы будемъ имѣть, что

$$P = \varepsilon_1\, Sin\,\varepsilon t\, Sin\,\delta$$
$$Q = - \varepsilon_1\, Cos\,\varepsilon t\, Sin\,\delta$$
$$R = \varepsilon_1\, Cos\,\delta + \varepsilon,$$

а такъ какъ

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$

ибо мы предполагаемъ неподвижную точку твердаго тѣла въ началѣ координатной системы

$$OXYZ,$$

то уравненія мгновенной оси твердаго тѣла, относительно этой системы, будутъ имѣть видъ

$$\frac{x}{Sin\,\varepsilon t\, Sin\,\delta} = \frac{y}{- Cos\,\varepsilon t\, Sin\,\delta} = \frac{z}{Cos\,\delta + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}}$$

Имѣя же эти уравненія, мы можемъ написать, что

$$x\,(\varepsilon_1\, Cos\,\delta + \varepsilon) = z\varepsilon_1\, Sin\,\varepsilon t\, Sin\,\delta$$
$$y\,(\varepsilon_1\, Cos\,\delta + \varepsilon) = - z\varepsilon_1\, Cos\,\varepsilon t\, Sin\,\delta,$$

откуда получимъ уравненіе неподвижнаго аксоида подъ видомъ

$$\frac{x^2+y^2}{\varepsilon_1^2 Sin^2 \delta} - \frac{z^2}{(\varepsilon_1 Cos \delta + \varepsilon)^2} = 0$$

и такимъ образомъ видимъ, что и неподвижный аксоидъ является конусомъ вращенія, при чемъ его осью вращенія служитъ ось OZ.

58. **Теорема.** *Въ общемъ случаѣ движенія твердаго тѣла, скорость любой его точки въ данный моментъ времени есть геометрическая сумма ея поступательной скорости, геометрически равной скорости точки, принятой за полюсъ, и ея вращательной скорости около мгновенной оси, проходящей черезъ этотъ полюсъ, при чемъ выборъ полюса произволенъ, а направленіе мгновенной оси и величина угловой скорости не зависятъ отъ этого выбора.*

Сопоставляя между собой формулы (48), (53) и (55), мы видимъ, что

$$v_e\, Cos(v_e, \Xi) = v_p\, Cos(v_p, \Xi) + w\, Cos(w, \Xi)$$

$$v_e\, Cos(v_e, \Upsilon) = v_p\, Cos(v_p, \Upsilon) + w\, Cos(w, \Upsilon)$$

$$v_e\, Cos(v_e, Z) = v_p\, Cos(v_p, Z) + w\, Cos(w, Z),$$

откуда заключаемъ, что

$$\overline{v_e} = \overline{v_p} + w, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

а такъ какъ

$$v_e$$

представляетъ изъ себя скорость произвольной точки твердаго тѣла въ общемъ случаѣ его движенія,

$$v_p$$

есть скорость той же точки въ предположеніи, что твердое тѣло движется поступательно вмѣстѣ съ точкой O_1, принятой за начало координатной системы, неизмѣнно связанной съ

нашимъ твердымъ тѣломъ и принятой такимъ образомъ за полюсъ, при чемъ

$$v_p = v_0,$$

гдѣ

$$v_0$$

есть скорость этого полюса, а

$$w$$

есть скорость опять-таки той же точки твердаго тѣла, при его вращательномъ движеніи около выбраннаго полюса, то равенство (63) доказываетъ первую часть предложенной теоремы.

Что касается второй части этой теоремы, то, для ея доказательства, переписавъ геометрическое равенство (63) подъ видомъ

$$\overline{v} = \overline{v_0} + \overline{w}$$

и имѣя въ виду, что координаты точки O_1 суть

$$x_0, \; y_0, \; z_0,$$

будемъ проектировать члены этого равенства на оси неподвижной въ пространствѣ координатной системы.

Мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} v \, Cos \, (v, X) &= x_0' + Q(z - z_0) - R(y - y_0) \\ v \, Cos \, (v, Y) &= y_0' + R(x - x_0) - P(z - z_0) \\ v \, Cos \, (v, Z) &= z_0' + P(y - y_0) - Q(x - x_0) \end{aligned}\right\} \; . \; . \; (64)$$

Возьмемъ теперь какую-нибудь другую точку A (черт. 65) нашего твердаго тѣла и обозначимъ ея координаты черезъ

$$x_A, \; y_A, \; z_A,$$

а скорость черезъ

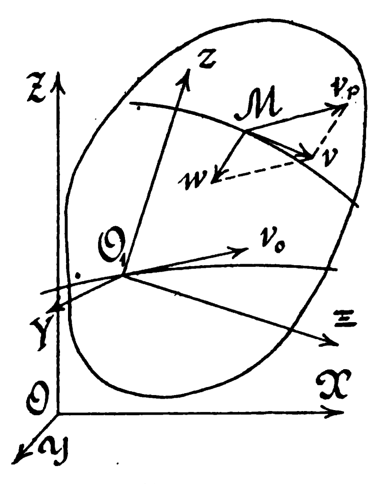
$$v_A.$$

Такъ какъ эта точка принадлежитъ разсматриваемому нами твердому тѣлу, то проекціи ея скорости на оси системы

$$OXYZ$$

опредѣлятся по формуламъ (64) и мы будемъ имѣть

$$x_A' = v_A\, Cos\,(v_A, X) = x_0' + Q\,(z_A - z_0) - R\,(y_A - y_0)$$
$$y_A' = v_A\, Cos\,(v_A, Y) = y_0' + R\,(x_A - x_0) - P\,(z_A - z_0)$$
$$z_A' = v_A\, Cos\,(v_A, Z) = z_0' + P\,(y_A - y_0) - Q\,(x_A - z_0).$$



Черт. 65.

Вычитая почленно полученныя формулы изъ соотвѣтственныхъ формулъ (64), мы получимъ

$$v\, Cos\,(v, X) = x_A' + Q\,(z - z_A) - R\,(y - y_A)$$
$$v\, Cos\,(v, Y) = y_A' + R\,(x - x_A) - P\,(z - z_A)$$
$$v\, Cos\,(v, Z) = z_A' + P\,(y - y_A) - Q\,(x - x_A),$$

сравнивая же полученныя формулы съ формулами (64), видимъ, что онѣ представляютъ проекціи на оси системы

$$OXYZ$$

скорости точки M, при условіи, что за полюсъ твердаго тѣла принята точка A съ координатами

$$x_A,\ y_A,\ z_A,$$

а такъ какъ въ эти формулы входятъ тѣ же величины

$$P,\ Q \text{ и } R,$$

какъ и въ формулы (64), то приходимъ къ заключенію, что какую бы точку твердаго тѣла мы ни приняли за полюсъ, направленіе его мгновенной оси и величина его угловой скорости, отвѣчающія данному моменту времени, остаются неизмѣнными, что и доказываетъ вторую половину разсматриваемой нами теоремы.

59. Предыдущее разсмотрѣніе показываетъ, что, въ каждый моментъ времени, скорости всѣхъ точекъ, лежащихъ на мгновенной оси, проходящей черезъ данную точку твердаго тѣла въ этотъ моментъ времени, геометрически равны между собой, ибо, для всѣхъ точекъ этой оси, вращательныя скорости равны нулю и, слѣдовательно, ихъ скорости геометрически равны скорости точки, принятой за полюсъ, а значитъ и геометрически равны между собой.

Имѣя въ виду далѣе, что мгновенныя оси, проходящія черезъ различныя точки твердаго тѣла, въ данный моментъ времени, всѣ параллельны между собой и параллельны вектору, выражающему угловую скорость, отвѣчающую разсматриваемому моменту, мы видимъ, что, при движеніи твердаго тѣла, въ любой моментъ времени, скорости всѣхъ его точекъ, лежащихъ на одной и той же изъ прямыхъ, параллельныхъ направленію его угловой скорости, отвѣчающей этому моменту, геометрически равны между собой; при переходѣ же отъ одной изъ этихъ прямыхъ къ другой, эти скорости мѣняются.

Найдемъ положеніе такой прямой въ твердомъ тѣлѣ, скорости точекъ которой, въ данный моментъ времени, были бы наименьшими, относительно скоростей всѣхъ его остальныхъ точекъ.

Такъ какъ, на основаніи равенствъ (64), скорость точки твердаго тѣла, имѣющей своими координатами

$$x, \; y, \; z,$$

выражается формулой

$$v = \sqrt{\begin{array}{c}\left\{x_0' + Q(z - z_0) - R(y - y_0)\right\}^2 + \left\{y_0' + R(x - x_0) - P(z - z_0)\right\}^2 + \\ + \left\{z_0' + P(y - y_0) - Q(x - x_0)\right\}^2\end{array}},$$

то, для рѣшенія поставленной задачи, надо найти такія значенія координатъ x, y и z, при которыхъ корень правой части послѣдней формулы имѣлъ бы наименьшее значеніе или, что все равно, при которыхъ имѣла бы наименьшее значеніе функція

$$\begin{aligned} F(x, y, z) = &\left\{x_0' + Q(z - z_0) - R(y - y_0)\right\}^2 + \\ &+ \left\{y_0' + R(x - x_0) - P(z - z_0)\right\}^2 + \\ &+ \left\{z_0' + P(y - y_0) - Q(x - x_0)\right\}^2. \end{aligned}$$

Поступая по общимъ правиламъ дифференціальнаго исчисленія, мы будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2\left\{y_0' + R(x - x_0) - P(z - z_0)\right\} R - \\ &- 2\left\{z_0' + P(y - y_0) - Q(x - x_0)\right\} Q = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2\left\{z_0' + P(y - y_0) - Q(x - x_0)\right\} P - \\ &- 2\left\{x_0' + Q(z - z_0) - R(y - y_0)\right\} R = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 2\left\{x_0' + Q(z - z_0) - R(y - y_0)\right\} Q - \\ &- 2\left\{y_0' + R(x - x_0) - P(z - z_0)\right\} P = 0, \end{aligned}$$

откуда видимъ, что значенія координатъ, дающія разсматриваемой функціи наименьшее или наибольшее значеніе, должны удовлетворять уравненіямъ

$$\frac{x_0' + Q(z - z_0) - R(y - y_0)}{P} = \frac{y_0' + R(x - x_0) - P(z - z_0)}{Q} = \\ = \frac{z_0' + P(y - y_0) - Q(x - x_0)}{R}, \quad . \; . \; . \; . \quad (65)$$

а такъ какъ, для этихъ значеній координатъ,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2R^2 + 2Q^2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2P^2 + 2R^2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2Q^2 + 2P^2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -2PQ;\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = -2QR;\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} = -2RP,$$

а, слѣдовательно,

$$d^2F = 2\{(Pdy - Qdx)^2 + (Qdz - Rdy)^2 + (Rdx - Pdz)^2\}.$$

и значитъ

$$d^2F > 0,$$

то для точекъ, лежащихъ на прямой, опредѣляемой уравненіями (65), разсматриваемая нами функція будетъ имѣть наименьшее значеніе и, слѣдовательно, эти точки будутъ обладать наименьшими скоростями, по отношенію къ остальнымъ точкамъ твердаго тѣла.

Разсматривая выраженія, стоящія въ числителяхъ уравненій (65), мы видимъ, что онѣ представляютъ изъ себя проекціи на оси координатъ скоростей точекъ, лежащихъ на прямой, выражаемой этими уравненіями, и, такимъ образомъ, приходимъ къ заключенію, что точки твердаго тѣла, обладающія въ данный моментъ времени наименьшими скоростями, расположены на прямой, параллельной его угловой скорости въ этотъ моментъ времени, при чемъ скорости разсматриваемыхъ точекъ сами направлены вдоль этой прямой.

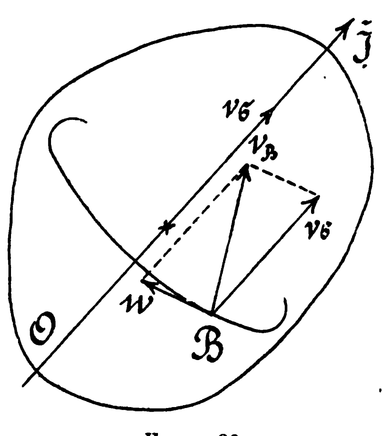
На основаніи вышеизложеннаго, мы приходимъ къ заключенію, что, при движеніи твердаго тѣла, въ каждый моментъ времени, въ немъ существуетъ нѣкоторая прямая, всѣ точки которой обладаютъ скоростями, совпадающими съ ней по направленію; скорости же всѣхъ остальныхъ точекъ твердаго тѣла суть геометрическія суммы скоростей точекъ упомянутой

прямой и вращательныхъ скоростей около нея, равныхъ моментамъ, относительно разсматриваемыхъ точекъ, угловой скорости даннаго твердаго тѣла въ соотвѣтствующій моментъ времени.

Такимъ образомъ, движеніе твердаго тѣла, въ каждый данный моментъ времени, можно разсматривать какъ скольженіе вдоль оси наименьшихъ скоростей и вмѣстѣ съ тѣмъ вращеніе около этой оси, или, другими словами, какъ винтовое движеніе около оси наименьшихъ скоростей.

На этомъ основаніи прямую, точки которой, при движеніи твердаго тѣла, обладаютъ въ данный моментъ времени наименьшими скоростями, будемъ называть **мгновенною осью скольженія и вращенія** или **мгновенною винтовою осью**, а скорости точекъ этой прямой **скоростями скольженія**.

Если мы положимъ, что прямая OJ (черт. 66) есть



Черт. 66.

мгновенная винтовая ось твердаго тѣла S, въ нѣкоторый моментъ времени t, и назовемъ скорость скольженія этого тѣла, въ разсматриваемый моментъ времени, черезъ

$$v_\sigma,$$

то скорость какой-нибудь его точки B будетъ

$$\bar{v}_B = \bar{v}_\sigma + \bar{w},$$

при чемъ

$$w = M_B(\omega) = r\omega,$$

гдѣ

$$\omega$$

есть угловая скорость разсматриваемаго твердаго тѣла въ данный моментъ времени, а

$$r$$

разстояніе точки B отъ оси OJ.

Имѣя въ виду, что

$$w \perp v_\sigma,$$

мы можемъ написать, что

$$v_B = \sqrt{v_\sigma^2 + \{M_B(\omega)\}^2} = \sqrt{v_\sigma^2 + r^2\omega^2}.$$

Изъ изложеннаго видно: 1) что скорости всѣхъ точекъ твердаго тѣла, расположенныхъ на поверхности кругового цилиндра, описаннаго около мгновенной винтовой оси, равны между собой по величинѣ; скорости же точекъ одной и той же производящей этого цилиндра, кромѣ того, и одинаково направлены, т. е. равны между собой геометрически (черт. 67).

2) Чѣмъ точка дальше расположена отъ мгновенной винтовой оси, тѣмъ скорость ея больше и образуетъ большій уголъ съ направленіемъ упомянутой оси.

и 3) Въ каждый моментъ времени, проекціи скоростей всѣхъ точекъ твердаго тѣла на направленіе мгновенной винтовой оси равны между собой.

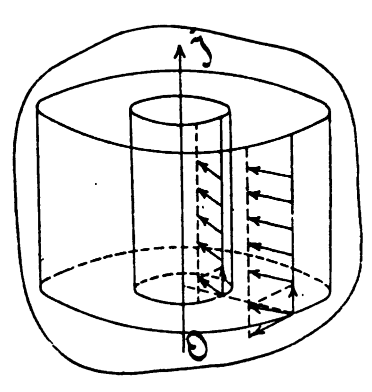
60. Уравненія (65) мгновенной винтовой оси, выведенныя въ предыдущемъ §, можно преобразовать, приведя ихъ къ обычной формѣ уравненій прямой подъ видомъ пропорціи.

Разсматривая равенство двухъ послѣднихъ отношеній уравненій (65), мы будемъ имѣть

$$Qz_0' - Ry_0' + PQ(y - y_0) - Q^2(x - x_0) - R^2(x - x_0) + \\ + PR(z - z_0) = 0$$

или

$$Qz_0' - Ry_0' + P\{P(x - x_0) + Q(y - y_0) + \\ + R(z - z_0)\} - (x - x_0)(P^2 + Q^2 + R^2) = 0,$$



Черт. 67.

откуда, принимая во вниманіе, что

$$P^2 + Q^2 + R^2 = \omega^2,$$

найдемъ

$$x - x_0 - \frac{1}{\omega^2}(Qz_0' - Ry_0') = \\ = \frac{P}{\omega^2}\Big\{P(x - x_0) + Q(y - y_0) + R(z - z_0)\Big\}$$

и точно также получимъ

$$y - y_0 - \frac{1}{\omega^2}(Rx_0' - Pz_0') = \\ = \frac{Q}{\omega^2}\Big\{P(x - x_0) + Q(y - y_0) + R(z - z_0)\Big\}$$

$$z - z_0 - \frac{1}{\omega^2}(Py_0' - Qx_0') = \\ = \frac{R}{\omega^2}\Big\{P(x - x_0) + Q(y - y_0) + R(z - z_0)\Big\}.$$

Сравнивая между собой полученныя равенства, найдемъ уравненія мгновенной винтовой оси подъ видомъ

$$\frac{x-a}{P}=\frac{y-b}{Q}=\frac{z-c}{R}.$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} a &= x_0+\frac{1}{\omega^2}(Qz_0'-Ry_0') \\ b &= y_0+\frac{1}{\omega^2}(Rx_0'-Pz_0') \\ c &= z_0+\frac{1}{\omega^2}(Py_0'-Qx_0') \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .(66)$$

Уравненія мгновенной винтовой оси, относительно координатной системы, неизмѣнно связанной съ твердымъ тѣломъ, будетъ

$$\frac{\xi-\alpha}{p}=\frac{\eta-\beta}{q}=\frac{\zeta-\gamma}{r},$$

гдѣ

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma$$

суть координаты, относительно этой системы, той точки, координаты которой, относительно системы

$$OXYZ,$$

суть

$$a,\ b,\ c$$

и, слѣдовательно, мы можемъ написать, что

$$\alpha=(a-x_0)\,a_1+(b-y_0)\,a_2+(c-z_0)\,a_3$$
$$\beta=(a-x_0)\,b_1+(b-y_0)\,b_2+(c-z_0)\,b_3$$
$$\gamma=(a-x_0)\,c_1+(b-y_0)\,c_2+(c-z_0)\,c_3,$$

принимая же во вниманіе равенства (66), мы будемъ имѣть

$$\alpha = \frac{1}{\omega^2}\left\{(Qz_0'-Ry_0')\,a_1+(Rx_0'-Pz_0')\,a_2+(Py_0'-Qx_0')\,a_3\right\}=$$
$$=\frac{1}{\omega^2}\Big\{[(pa_2+qb_2+rc_2)\,z_0'-(pa_3+qb_3+rc_3)\,y_0']\,a_1+$$
$$+[(pa_3+qb_3+rc_3)\,x_0'-(pa_1+qb_1+rc_1)\,z_0']\,a_2+$$
$$+[(pa_1+qb_1+rc_1)\,y_0'-(pa_2+qb_2+rc_2)\,x_0']\,a_3\Big\}=$$
$$=\frac{1}{\omega^2}\Big\{q[(a_2b_3-a_3b_2)\,x_0'+(a_3b_1-a_1b_3)\,y_0'+(a_1b_2-a_2b_1)\,z_0']-$$
$$-r[(c_2a_3-c_3a_2)\,x_0'+(c_3a_1-c_1a_3)\,y_0'+(c_1a_2-c_2a_1)\,z_0']\Big\}$$

или

$$\alpha=\frac{1}{\omega^2}\left\{q(x_0'c_1+y_0'c_2+z_0'c_3)-r(x_0'b_1+y_0'b_2+z_0'b_3)\right\}$$

и, слѣдовательно,

$$\alpha=\frac{1}{\omega^2}\left\{qv_0\,Cos(v_0,Z)-rv_0\,Cos(v_0,\Upsilon)\right\}$$

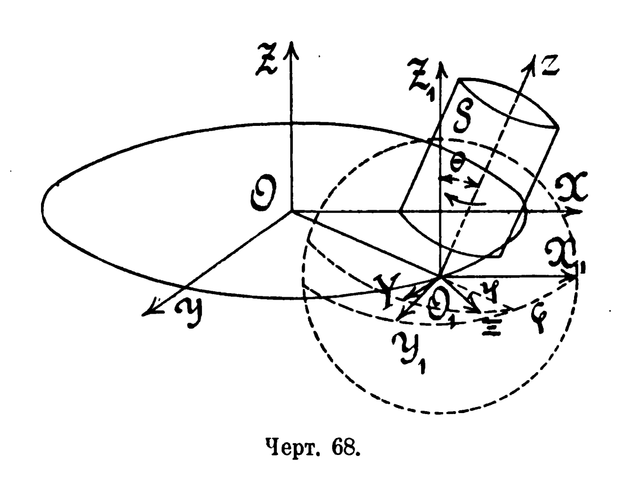
Точно также мы найдемъ, что

$$\beta=\frac{1}{\omega^2}\left\{rv_0\,Cos(v_0,\Xi)-pv_0\,Cos(v_0,Z)\right\} \qquad \ldots (67)$$
$$\gamma=\frac{1}{\omega^2}\left\{pv_0\,Cos(v_0,\Upsilon)-qv_0\,Cos(v_0,\Xi)\right\}$$

Примѣръ 22. Положимъ, что имѣемъ систему трехъ неизмѣнно связанныхъ между собой стержней OZ, OO_1 и O_1Z (черт. 68), изъ коихъ два OZ и O_1Z, не будучи параллельными между собой, перпендикулярны къ третьему OO_1. Положимъ, что эта система равномѣрно вращается около оси стержня OZ и что на стержень O_1Z надѣто твердое тѣло S, вращающееся, въ свою очередь, равномѣрно около оси этого стержня.

Требуется опредѣлить уравненіе мгновенной винтовой оси и величину скорости скольженія, движущагося указаннымъ образомъ, тѣла S.

Примемъ за начало неподвижной координатной системы точку O и направимъ ось OZ по оси стержня, около котораго происходитъ вращеніе всей системы; точку O_1 примемъ за начало координатной системы, неизмѣнно связанной съ разсматриваемымъ твердымъ тѣломъ, при чемъ направимъ ось O_1Z по оси вращенія этого тѣла, а ось $O_1\Xi$ возьмемъ такъ, чтобы она совпадала съ направленіемъ оси OX, когда точка O_1 находится на этой оси.



Черт. 68.

Въ такомъ случаѣ, если мы назовемъ угловую скорость равномѣрнаго вращенія всей системы около оси OZ черезъ

$$\varepsilon,$$

а угловую скорость вращенія твердаго тѣла около его оси черезъ

$$\varepsilon_1,$$

длину отрѣзка OO_1 черезъ

$$\rho;$$

а уголъ между осями OZ и O_1Z черезъ

$$\delta,$$

то движеніе нашего твердаго тѣла опредѣлится координатами точки O_1, относительно системы

$$OXYZ,$$

которыя въ функціяхъ отъ времени выразятся формулами

$$x_0 = \rho \, Cos \, \varepsilon t, \quad y_0 = \rho \, Sin \, \varepsilon t, \quad z_0 = 0$$

и Эйлеровыми углами, которые указаны на чертежѣ и которые, въ зависимости отъ времени, выразятся формулами

$$\varphi = \varepsilon t, \quad \psi = \varepsilon_1 t, \quad \theta = \delta.$$

Въ разсматриваемомъ нами случаѣ мы будемъ имѣть проекціи угловой скорости на оси системы

$$O_1 \Xi \Upsilon Z$$

подъ видомъ

$$p = \varepsilon \, Sin \, \varepsilon_1 t \, Sin \, \delta$$
$$q = \varepsilon \, Cos \, \varepsilon_1 t \, Sin \, \delta$$
$$r = \varepsilon \, Cos \, \delta + \varepsilon_1,$$

проекціи угловой скорости на оси системы

$$OXYZ$$

будутъ

$$P = \varepsilon_1 \, Sin \, \varepsilon t \, Sin \, \delta$$
$$Q = - \varepsilon_1 \, Cos \, \varepsilon t \, Sin \, \delta$$
$$R = \varepsilon_1 \, Cos \, \delta + \varepsilon$$

и угловая скорость опредѣлится равенствомъ

$$\omega^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + 2\varepsilon\varepsilon_1 \, Cos \, \delta$$

Координаты точки, черезъ которую проходитъ мгновенная винтовая ось, на основаніи формулъ (66), будутъ

$$a = \rho\, Cos\, \varepsilon t - \frac{(\varepsilon_1 Cos\,\delta + \varepsilon)\,\rho\,\varepsilon\, Cos\,\varepsilon t}{\omega^2} = \frac{\rho\varepsilon_1 Cos\,\varepsilon t\,(\varepsilon_1 + \varepsilon\, Cos\,\delta)}{\omega^2}$$

$$b = \rho\, Sin\, \varepsilon t - \frac{(\varepsilon_1 Cos\,\delta + \varepsilon)\,\rho\,\varepsilon\, Sin\,\varepsilon t}{\omega^2} = \frac{\rho\,\varepsilon_1 Sin\,\varepsilon t\,(\varepsilon_1 + \varepsilon\, Cos\,\delta)}{\omega^2}$$

$$c = \frac{\varepsilon_1 Sin\,\varepsilon t\, Sin\,\delta\,.\,\rho\,\varepsilon\, Cos\,\varepsilon t - \varepsilon_1 Cos\,\varepsilon t\, Sin\,\delta\,.\,\rho\,\varepsilon\, Sin\,\varepsilon t}{\omega^2} = 0.$$

Слѣдовательно, уравненія мгновенной винтовой оси будутъ имѣть видъ

$$\frac{x - \frac{\rho\varepsilon_1}{\omega^2} Cos\,\varepsilon t\,(\varepsilon_1 + \varepsilon\, Cos\,\delta)}{\varepsilon_1 Sin\,\varepsilon t\, Sin\,\delta} = \frac{y - \frac{\rho\varepsilon_1}{\omega^2} Sin\,\varepsilon t\,(\varepsilon_1 + \varepsilon\, Cos\,\delta)}{-\varepsilon_1 Cos\,\varepsilon t\, Sin\,\delta} = \frac{z}{\varepsilon + \varepsilon_1 Cos\,\delta}$$

Скоростью скольженія будетъ скорость какой-нибудь точки мгновенной винтовой оси, а слѣдовательно и скорость точки съ координатами

$$a,\ b,\ c.$$

Имѣя это въ виду, на основаніи формулъ (64), мы будемъ имѣть

$$v_\sigma\, Cos\,(v_0, X) = -\rho\varepsilon\, Sin\,\varepsilon t + (\varepsilon_1 Cos\,\delta + \varepsilon)\frac{(\varepsilon_1 Cos\,\delta + \varepsilon)\,\rho\varepsilon\, Sin\,\varepsilon t}{\omega^2} = -\frac{\rho\,\varepsilon\varepsilon_1^2\, Sin\,\varepsilon t\, Sin^2\delta}{\omega^2}$$

$$v_\sigma\, Cos\,(v_\sigma, Y) = \rho\varepsilon\, Cos\,\varepsilon t - (\varepsilon_1 Cos\,\delta + \varepsilon)\frac{(\varepsilon_1 Cos\,\delta + \varepsilon)\,\rho\varepsilon\, Cos\,\varepsilon t}{\omega^2} = \frac{\rho\,\varepsilon\varepsilon_1^2\, Cos\,\varepsilon t\, Sin^2\delta}{\omega^2}$$

$$v_\sigma\, Cos\,(v_\sigma, Z) = -\varepsilon_1 Sin\,\varepsilon t\, Sin\,\delta\,\frac{(\varepsilon_1 Cos\,\delta + \varepsilon)\,\rho\varepsilon\, Sin\,\varepsilon t}{\omega^2} + \varepsilon_1\, Cos\,\varepsilon t\, Sin\,\delta\,\frac{(\varepsilon_1 Cos\,\delta + \varepsilon)\,\rho\varepsilon\, Cos\,\varepsilon t}{\omega^2} =$$

$$= -\varepsilon_1\, Sin\,\delta\,\frac{\varepsilon_1 Cos\,\delta + \varepsilon}{\omega^2}\,\rho\varepsilon = -\rho\varepsilon\varepsilon_1\, Sin\,\delta\,\frac{\varepsilon_1 Cos\,\delta + \varepsilon}{\omega^2}$$

и, слѣдовательно, получимъ, что

$$v_\sigma =$$

$$= \frac{\rho\varepsilon\varepsilon_1}{\omega^2} Sin\,\delta \sqrt{\varepsilon_1{}^2 Sin^2\varepsilon t\, Sin^2\delta + \varepsilon_1{}^2\, Cos^2\varepsilon t\, Sin^2\delta + (\varepsilon_1 Cos\,\delta + \varepsilon)^2} =$$

$$= \frac{\rho\,\varepsilon\varepsilon_1}{\omega} Sin\,\delta$$

и что

$$Cos\,(v_\sigma\,,\,X) = -\frac{\varepsilon_1\,Sin\,\varepsilon t\,Sin\,\delta}{\omega}$$

$$Cos\,(v_\sigma\,,\,Y) = \frac{\varepsilon_1\,Cos\,\varepsilon t\,Sin\,\delta}{\omega}$$

$$Cos\,(v_\sigma,\,Z) = -\,\frac{\varepsilon_1\,Cos\,\delta + \varepsilon}{\omega}.$$

Такимъ образомъ, мы будемъ знать скорость скольженія какъ по величинѣ, такъ и по направленію.

Глава VI.

Объ аксоидахъ винтовыхъ осей.

61. Геометрическое мѣсто мгновенныхъ винтовыхъ осей въ твердомъ тѣлѣ мы будемъ называть **подвижнымъ аксоидомъ винтовыхъ осей**, а геометрическое мѣсто мгновенныхъ винтовыхъ осей въ пространствѣ—**неподвижнымъ аксоидомъ винтовыхъ осей**. Оба эти аксоида суть, слѣдовательно, линейчатыя поверхности, которыя, при движенiи твердаго тѣла, въ каждый моментъ времени, имѣютъ общую производящую, являющуюся мгновенной винтовой осью разсматриваемаго твердаго тѣла въ данный моментъ времени.

Теорема. *При движенiи твердаго тѣла, подвижный и неподвижный аксоиды винтовыхъ осей, въ каждой точкѣ общей ихъ производящей, въ данный моментъ времени, имѣютъ общую касательную плоскость, или, другими словами, касаются другъ друга вдоль всей ихъ общей производящей въ каждый моментъ времени.*

Для доказательства предложенной теоремы, возьмемъ какую-нибудь точку M (черт. 69) твердаго тѣла, лежащую, въ нѣкоторый моментъ времени, на общей производящей J подвижнаго и неподвижнаго аксоидовъ S и S_1 разсматриваемаго тѣла и назовемъ абсолютную, относительную и переносную скорости этой точки соотвѣтственно черезъ

$$v_a, \; v_r, \; v_e.$$

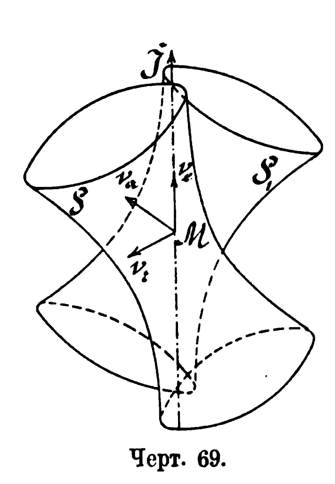
Въ такомъ случаѣ мы будемъ имѣть, что

$$\overline{v_a} = \overline{v_r} + \overline{v_e} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (68)$$

Абсолютная скорость точки M лежитъ въ плоскости касательной къ неподвижному аксоиду въ этой точкѣ, ея переносная скорость, какъ скорость точки твердаго тѣла, направлена вдоль мгновенной оси, а потому плоскость, содержащая на себѣ векторы



$$v_a \text{ и } v_e$$



Черт. 69.

есть касательная плоскость въ точкѣ M къ неподвижному аксоиду; съ другой стороны относительная скорость этой точки лежитъ въ плоскости касательной къ подвижному аксоиду, а потому плоскость, содержащая на себѣ векторы

$$v_r \text{ и } v_e ,$$

есть касательная плоскость въ точкѣ M къ подвижному аксоиду, (68), а такъ какъ всѣ три вектора

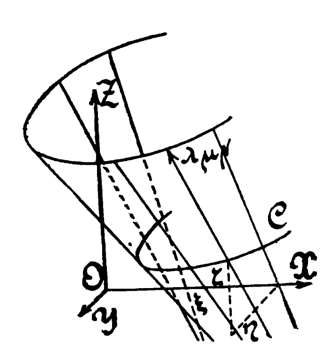
$$v_a , \ v_r \text{ и } v_e$$

должны лежать въ одной и той же плоскости, то мы приходимъ къ заключенію, что оба аксоида въ точкѣ M имѣютъ общую касательную плоскость, что и доказываетъ предложенную теорему, ибо точка M есть произвольная точка общей производящей аксоидовъ въ нѣкоторый моментъ времени.

Слѣдствіе. *При движеніи твердаго тѣла, его подвижной аксоидъ винтовыхъ осей катится по неподвижному, скользя вдоль ихъ общей производящей.*

62. Чтобы подробнѣе выяснить свойства аксоидовъ винтовыхъ осей, которые, какъ мы видимъ, принадлежатъ къ классу линейчатыхъ поверхностей, остановимся нѣсколько на общихъ свойствахъ послѣднихъ.

Положимъ, что мы имѣемъ нѣкоторую кривую C (черт. 70) въ пространствѣ, заданную, относительно прямоугольной си-



Черт. 70.

стемы координатныхъ осей, посредствомъ заданія координатъ ея перемѣнной точки въ функціи отъ одного параметра

$$u,$$

уравненіями

$$\xi = f_1(u)$$

$$\eta = f_2(u)$$

$$\zeta = f_3(u)$$

Положимъ затѣмъ, что нѣкоторая прямая движется въ пространствѣ такъ, что постоянно пересѣкаетъ кривую C, при чемъ косинусы угловъ, образуемыхъ этой прямой съ осями координатъ,

$$\lambda,\ \mu,\ \nu$$

суть нѣкоторыя функціи того **же** параметра

$$u.$$

Въ такомъ случаѣ каждой точкѣ кривой C будетъ отвѣчать вполнѣ опредѣленное положеніе разсматриваемой нами прямой, которая, въ своемъ движеніи въ пространствѣ, образуетъ нѣкоторую линейчатую поверхность.

Прямую, движеніемъ которой образуется данная линейчатая поверхность, мы будемъ называть **образующей** или **производящей** этой поверхности, а кривую, черезъ точки которой проходитъ производящая, при ея движеніи, будемъ называть **направляющей кривой** для разсматриваемой поверхности.

Принимая во вниманіе, что уравненіе образующей линейчатой поверхности, при вышеприведенныхъ данныхъ, можетъ быть представлено подъ видомъ

$$\frac{X-\xi}{\lambda}=\frac{Y-\eta}{\mu}=\frac{Z-\zeta}{\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

гдѣ

$$X, Y, Z$$

суть координаты перемѣнной точки этой прямой, и обозначая общую величину отношеній пропорціи (69) черезъ

$$v,$$

т. е. полагая, что

$$\frac{X-\xi}{\lambda}=\frac{Y-\eta}{\mu}=\frac{Z-\zeta}{\nu}=v,$$

мы видимъ, что каждому значенію v отвѣчаетъ опредѣленная точка на образующей линейчатой поверхности, и такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что координаты точки линейчатой поверхности могутъ быть выражены равенствами

$$x=\xi+\lambda v$$
$$y=\eta+\mu v$$
$$z=\zeta+\nu v$$

и являются, слѣдовательно, функціями двухъ параметровъ

u и v.

Переходя къ разсмотрѣнію нѣкоторыхъ свойствъ линейчатыхъ поверхностей, начнемъ съ разсмотрѣнія ихъ касательныхъ плоскостей, въ зависимости отъ свойствъ которыхъ, разсматриваемыя поверхности, какъ мы увидимъ ниже, дѣлятся на два, рѣзко различающіеся другъ отъ друга, класса.

63. Имѣя въ виду выраженія координатъ точекъ линейчатой поверхности, мы можемъ представить уравненіе ея касательной плоскости въ нѣкоторой точкѣ подъ видомъ [1])

$$\begin{vmatrix} X-\xi-\lambda v; & Y-\eta-\mu v; & Z-\zeta-\nu v \\ \xi'+\lambda' v & ; \eta'+\mu' v & ; \zeta'+\nu' v \\ \lambda & ; \mu & ; \nu \end{vmatrix} = 0$$

---

[1]) Замѣтимъ, что, если координаты точекъ поверхности заданы, въ функціяхъ отъ двухъ параметровъ, уравненіями

$$x = \varphi_1(u_1 v);\ y = \varphi_2(u_1 v);\ z = \varphi_3(u_1 v), \quad \ldots\ldots \quad (70)$$

то уравненіе касательной къ ней плоскости въ нѣкоторой точкѣ можетъ быть представлено подъ видомъ

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0, \quad \ldots\ldots \quad (71)$$

гдѣ коэффиціенты

$$A,\ B,\ C$$

связаны уравненіями

$$\left.\begin{aligned} A\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}+B\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}+C\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}=0 \\ A\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}+B\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}+C\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}=0 \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (72)$$

ибо, при постоянномъ v, ур—ія (70) представляютъ кривую, начерченную на разсматриваемой поверхности, уравненіе касательной къ которой будетъ имѣть видъ

$$\frac{X-x}{\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}},$$

а такъ какъ эта касательная должна быть перпендикулярна къ параметру плоскости, опредѣляемой уравненіемъ (71), то мы и получимъ первое изъ условій (72). Второе изъ этихъ условій есть условіе перпендикулярности

или

$$\begin{vmatrix} X-\xi\ ; & Y-\eta\ ; & Z-\zeta \\ \xi'+\lambda' v; & \eta'+\mu' v; & \zeta'+\nu' v \\ \lambda\ ; & \mu\ ; & \nu \end{vmatrix} = 0 \quad . . (73)$$

или же подъ видомъ

$$P + vQ = 0, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . (74)$$

гдѣ

$$P = \begin{vmatrix} X-\xi\ ; & Y-\eta\ ; & Z-\zeta \\ \xi'\ ; & \eta'\ ; & \zeta' \\ \lambda\ ; & \mu\ ; & \nu \end{vmatrix} \text{ и } Q = \begin{vmatrix} X-\xi; & Y-\eta; & Z-\zeta \\ \lambda'\ ; & \mu'\ ; & \nu' \\ \lambda\ ; & \mu\ ; & \nu \end{vmatrix}$$

Теорема. *Касательная плоскость къ линейчатой поверхности, въ ея нѣкоторой точкѣ, содержитъ на себѣ всю производящую, проходящую черезъ эту точку.*

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе касательной плоскости къ линейчатой поверхности подъ видомъ (73) удовлетворяется координатами

$$\xi,\ \eta,\ \zeta$$

точки пересѣченія производящей, на которой лежитъ точка касанія, съ направляющей кривой для разсматриваемой поверхности; слѣдовательно, въ касательной плоскости, кромѣ

параметра плоскости (71) къ касательной къ кривой, опредѣляемой уравненіями (70), при постоянномъ u.

Исключая же

$$A,\ B,\ C$$

изъ уравненій (71) и (72), мы получимъ уравненіе касательной плоскости къ разсматриваемой нами поверхности подъ видомъ

$$\begin{vmatrix} X-x, & Y-y, & Z-z \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}, & \frac{\partial\varphi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}, & \frac{\partial\varphi_3}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

точки касанія, лежитъ еще одна точка образующей, проходящей черезъ точку касанія, а стало быть и вся эта образующая.

Разсматривая уравненіе касательной плоскости подъ видомъ (74), мы видимъ, что оно, вообще говоря, измѣняется съ измѣненіемъ параметра

$$v$$

и, слѣдовательно, по мѣрѣ перемѣщенія точки касанія вдоль одной и той же производящей линейчатой поверхности, касательная плоскость вращается около этой производящей.

Теорема. *Для того, чтобы во всѣхъ точкахъ одной и той же производящей линейчатая поверхность имѣла общую касательную плоскость, необходимо и достаточно, чтобы опредѣлитель*

$$D = \begin{vmatrix} \xi', & \eta', & \zeta' \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix}$$

равнялся нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, чтобы касательная плоскость не измѣнялась, съ измѣненіемъ параметра v, необходимо и достаточно, чтобы уравненіе разсматриваемой плоскости

$$P + vQ = 0$$

не содержало этого параметра, т. е. чтобы одновременно имѣли мѣсто уравненія

$$\begin{vmatrix} X-\xi, & Y-\eta, & Z-\zeta \\ \xi' & , \eta' & , \zeta' \\ \lambda & , \mu & , \nu \end{vmatrix} = 0 \text{ и } \begin{vmatrix} X-\xi, & Y-\eta, & Z-\zeta \\ \lambda' & , \mu' & , \nu' \\ \lambda & , \mu & , \nu \end{vmatrix} = 0,$$

а слѣдовательно, и уравненіе

$$\begin{vmatrix} \xi', & \eta', & \zeta' \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} = 0,$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

64. **Линейчатую поверхность**, касательная плоскость къ которой измѣняется, при перемѣщеніи ея точки касанія вдоль одной и той же производящей, будемъ называть **косой**, а линейчатую поверхность, имѣющую общую касательную плоскость во всѣхъ точкахъ одной и той же производящей, будемъ называть **развертывающейся**.

Теорема. *Всѣ образующія развертывающейся линейчатой поверхности касаются одной и той же кривой, лежащей на этой поверхности.*

Въ самомъ дѣлѣ, если линейчатая поверхность, общія уравненія образующихъ которой суть

$$\frac{X-\xi}{\lambda}=\frac{Y-\eta}{\mu}=\frac{Z-\zeta}{\nu}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

гдѣ

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \lambda,\ \mu \text{ и } \nu$$

суть функціи нѣкотораго параметра

$$u,$$

развертывающаяся, то, по предыдущей теоремѣ,

$$\begin{vmatrix} \xi', & \eta', & \zeta' \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} = 0$$

и, слѣдовательно,

$$\xi'(\mu'\nu-\nu'\mu)+\lambda'(\mu\zeta'-\nu\eta')+\lambda(\eta'\nu'-\zeta'\mu')=0.$$

или

$$\xi'+\lambda'\frac{\mu\zeta'-\nu\eta'}{\mu'\nu-\nu'\mu}+\lambda\frac{\eta'\nu'-\zeta'\mu'}{\mu'\nu-\nu'\mu}=0.$$

Полагая въ полученномъ уравненіи, что

$$\frac{\mu\zeta'-\nu\eta'}{\mu'\nu-\nu'\mu}=r$$

$$\frac{\eta'\nu'-\zeta'\mu'}{\mu'\nu-\nu'\mu}=-\rho,$$

гдѣ v и ρ суть тоже функціи параметра u, мы получимъ, что

$$\eta'\nu - \zeta'\mu = v(\nu'\mu - \mu'\nu)$$
$$\eta'\nu' - \zeta'\mu' = \rho(\nu'\mu - \mu'\nu),$$

откуда будемъ имѣть

$$\eta' = \frac{\mu' v(\nu'\mu - \mu'\nu) - \mu\rho(\nu'\mu - \mu'\nu)}{\nu\mu' - \mu\nu'} = -v\mu' + \rho\mu$$
$$\zeta' = \frac{\nu' v(\nu'\mu - \mu'\nu) - \nu\rho(\nu'\mu - \mu'\nu)}{\nu\mu' - \mu\nu'} = -v\nu' + \rho\nu$$

и, слѣдовательно, получимъ систему трехъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} \xi' + \lambda' v - \rho\lambda = 0 \\ \eta' + \mu' v - \rho\mu = 0 \\ \zeta' + \nu' v - \rho\nu = 0 \end{aligned}\right\}.$$

которая можетъ быть представлена подъ видомъ

$$\frac{\xi' + \lambda' v}{\lambda} = \frac{\eta' + \mu' v}{\mu} = \frac{\zeta' + \nu' v}{\nu}$$

или

$$\frac{\xi' + \lambda' v + \lambda v'}{\lambda} = \frac{\eta' + \mu' v + \mu v'}{\mu} = \frac{\zeta' + \nu' v + \nu v'}{\nu}$$

или же

$$\frac{(\xi + \lambda v)'}{\lambda} = \frac{(\eta + \mu v)'}{\mu} = \frac{(\zeta + \nu v)'}{\nu}.$$

Полученная пропорція показываетъ, что прямыя, имѣющія общія уравненія вида

$$\frac{X - (\xi + \lambda v)}{\lambda} = \frac{Y - (\eta + \mu v)}{\mu} = \frac{Z - (\zeta + \nu v)}{\nu},$$

суть касательныя къ нѣкоторой кривой, координаты точекъ которой суть

$$x = \xi + \lambda v$$
$$y = \eta + \mu v$$
$$z = \zeta + \nu v$$

и для которой v есть функція параметра u, а такъ какъ уравненія (75) могутъ быть приведены къ виду

$$\frac{X-\xi-\lambda v}{\lambda}=\frac{Y-\eta-\mu v}{\mu}=\frac{Z-\zeta-\nu v}{\nu},$$

то мы и приходимъ къ заключенію, что всѣ образующія линейчатой поверхности въ разсматриваемомъ случаѣ, т. е. когда она развертывающаяся, касаются одной и той же кривой, лежащей на этой поверхности, и, слѣдовательно, предложенная теорема доказана.

Теорема. *(обратная). Если всѣ образующія линейчатой поверхности касаются одной и той же кривой, то разсматриваемая поверхность развертывающаяся.*

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что на данной линейчатой поверхности существуетъ такая кривая, касательныя къ которой суть производящія этой поверхности. Полагая, что, для точекъ этой кривой, параметры u и v связаны уравненіемъ

$$v=\varphi(u),$$

мы видимъ, что координаты

$$x=\xi+\lambda v$$
$$y=\eta+\mu v$$
$$z=\zeta+\nu v$$

точекъ линейчатой поверхности, лежащихъ на этой кривой, будутъ функціями лишь одного независимаго параметра, а потому уравненія касательной къ разсматриваемой кривой могутъ быть представлены подъ видомъ

$$\frac{X-x}{\xi'+\lambda' v+\lambda v'}=\frac{Y-y}{\eta'+\mu' v+\mu v'}=\frac{Z-z}{\zeta'+\nu' v+\nu v'},$$

а такъ какъ, по нашему предположенію, эта касательная является одной изъ производящихъ линейчатой поверхности, общія уравненія которыхъ, какъ мы видѣли, суть

$$\frac{X-x}{\lambda}=\frac{Y-y}{\mu}=\frac{Z-z}{\nu},$$

то должна имѣть мѣсто пропорція

$$\frac{\xi'+\lambda'v+\lambda v'}{\lambda}=\frac{\eta'+\mu'v+\mu v'}{\mu}=\frac{\zeta'+\nu'v+\nu v'}{\nu},$$

или пропорція

$$\frac{\xi'+\lambda'v}{\lambda}=\frac{\eta+\mu'v}{\mu}=\frac{\zeta'+\nu'v}{\nu}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

а слѣдовательно, и уравненія

$$\left.\begin{aligned}\xi'+\lambda'v-\rho\lambda=0\\ \eta'+\mu'v-\rho\mu=0\\ \zeta'+\nu'v-\rho\nu=0\end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

гдѣ подъ ρ мы разумѣемъ общую величину отношеній пропорціи (76).

Разсматривая уравненія (77), мы видимъ, что

$$\begin{vmatrix}\xi', & \eta', & \zeta'\\ \lambda', & \mu', & \nu'\\ \lambda, & \mu, & \nu\end{vmatrix}=0,$$

а такъ какъ равенство нулю этого опредѣлителя, по вышеизложенному, есть признакъ того, что разсматриваемая нами линейчатая поверхность развертывающаяся, то мы видимъ, что поверхность будетъ таковой, когда всѣ ея производящія касаются одной и той же кривой, и, слѣдовательно, наша теорема доказана.

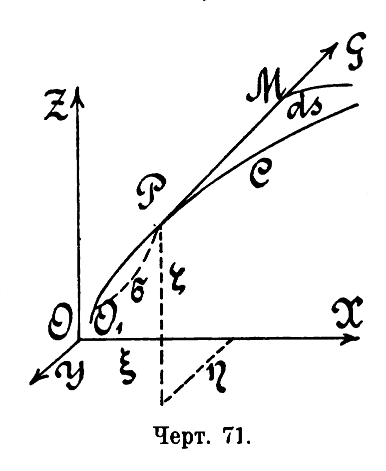
Ту кривую, которой касаются всѣ образующія развертывающейся линейчатой поверхности, будемъ называть ея **ребромъ возврата**.

65. **Теорема.** *Всякая развертывающаяся линейчатая поверхность можетъ быть безъ складокъ и разрывовъ развернута на плоскость.*

Для того, чтобы доказать эту теорему, покажемъ, что любой линейный элементъ, построенный при какой-нибудь точкѣ развертывающейся линейчатой поверхности, плоскій.

Положимъ, что мы имѣемъ нѣкоторую развертывающуюся линейчатую поверхность, для которой кривая C (черт. 71) служитъ ребромъ возврата и возьмемъ какую-нибудь точку M разсматриваемой поверхности, лежащую на производящей MP въ разстояніи v отъ ея точки касанія P къ ребру возврата. Называя координаты точки P черезъ

$$\xi, \eta, \zeta$$



Черт. 71.

и имѣя въ виду, что уравненіе образующей линейчатой поверхности, въ разсматриваемомъ нами случаѣ, можетъ быть представлено подъ видомъ

$$\frac{X-\xi}{\xi'} = \frac{Y-\eta}{\eta'} = \frac{Z-\zeta}{\zeta'},$$

такъ какъ эта поверхность развертывающаяся, мы можемъ представить координаты точки M подъ видомъ

$$x = \xi + v\xi'$$
$$y = \eta + v\eta'$$
$$z = \zeta + v\zeta'$$

Принимая далѣе за независимый параметръ, функціями котораго являются координаты точекъ ребра возврата, длину

его дуги, отсчитываемую отъ его нѣкоторой точки O_1 и называя этотъ параметръ черезъ

$$\sigma,$$

мы можемъ написать выраженіе для квадрата нѣкотораго линейнаго элемента, построеннаго при точкѣ M на разсматриваемой нами линейчатой поверхности, подъ видомъ

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 =$$

$$= \left\{(\xi' + v\xi'')\, d\sigma + \xi'\, dv\right\}^2 + \left\{(\eta' + v\eta'')\, d\sigma + \eta'\, dv\right\}^2 +$$

$$+ \left\{(\zeta' + v\zeta'')\, d\sigma + \zeta'\, dv\right\}^2 =$$

$$= \left\{(\xi' + v\xi'')^2 + (\eta' + v\eta'')^2 + (\zeta' + v\zeta'')^2\right\} d\sigma^2 +$$

$$+ 2\left\{(\xi' + v\xi'')\,\xi' + (\eta' + v\eta'')\,\eta' + (\zeta' + v\zeta'')\,\zeta'\right\} d\sigma\, dv +$$

$$+ (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)\, dv^2.$$

Принимая же во вниманіе, что

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1$$

и что слѣдовательно

$$\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = 0,$$

обозначая кривизну ребра возврата черезъ

$$k$$

и имѣя въ виду, что въ такомъ случаѣ

$$k = \sqrt{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2},$$

мы будемъ имѣть, что

$$ds^2 = (1 + v^2k^2)\, d\sigma^2 + 2d\sigma\, dv + dv^2,$$

причемъ k есть нѣкоторая функція отъ σ, т. е.

$$k = \varphi(\sigma).$$

Разсматривая полученное выраженіе, мы видимъ, что, если мы возьмемъ двѣ поверхности, для которыхъ кривизны

реберъ возврата выражаются одной и той же функціей отъ длинъ ихъ дугъ, то линейные элементы, построенные при соотвѣтственныхъ точкахъ (при одинаковыхъ v) разсматриваемыхъ поверхностей, совпадутъ между собой, при наложеніи. Имѣя въ виду далѣе, что мы всегда можемъ взять на плоскости кривую, для которой

$$k = \varphi(\sigma),$$

гдѣ φ есть данная функція, и что линейчатая поверхность, для которой эта кривая будетъ служить ребромъ возврата, будетъ плоскостью, а слѣдовательно, будетъ имѣть плоскими и всѣ линейные элементы, построенные при ея любой точкѣ, мы приходимъ къ заключенію, что линейный элементъ

$$ds$$

разсматриваемой нами поверхности можетъ быть совмѣщенъ съ плоскимъ элементомъ, а слѣдовательно, и самъ плоскій, и значитъ, предложенная теорема доказана.

Только что доказанная теорема выясняетъ смыслъ названія развертывающихся линейчатыхъ поверхностей.

66. **Центральной точкой** данной образующей линейчатой поверхности мы будемъ называть предѣльное положеніе точки встрѣчи съ этой образующей общаго перпендикуляра къ ней и, къ безконечно близкой къ ней, сосѣдней образующей.

Положимъ, что мы имѣемъ двѣ образующія G и G_1 нѣкоторой линейчатой поверхности (черт. 72), изъ коихъ первая проходитъ черезъ точку P направляющей кривой C этой поверхности и имѣетъ уравненія

$$\frac{X-\xi}{\lambda} = \frac{Y-\eta}{\mu} = \frac{Z-\zeta}{\nu},$$

а вторая черезъ точку P_1 и имѣетъ уравненія

$$\frac{X-\xi_1}{\lambda_1} = \frac{Y-\eta_1}{\mu_1} = \frac{Z-\zeta_1}{\nu_1}.$$

Положимъ затѣмъ, что точкѣ P отвѣчаетъ нѣкоторое

значеніе u перемѣннаго параметра, отъ котораго зависятъ величины

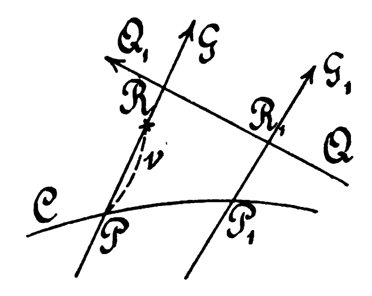
$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \lambda,\ \mu \text{ и } \nu,$$

а точкѣ P_1 значеніе

$$u + \Delta u$$

этого параметра, такъ что

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1 = \xi + \Delta\xi,\ \eta_1 = \eta + \Delta\eta,\ \zeta_1 = \zeta + \Delta\zeta \\ \lambda_1 = \lambda + \Delta\lambda,\ \mu_1 = \mu + \Delta\mu,\ \nu_1 = \nu + \Delta\nu \end{array}\right\} \ . \ . \quad (78)$$



Черт. 72.

Положимъ, что общій перпендикуляръ къ разсматриваемымъ образующимъ есть QQ_1 и назовемъ его точки встрѣчи съ этими образующими соотвѣтственно черезъ R и R_1. Предѣльное положеніе точки R, когда Δu будетъ стремиться къ нулю и дастъ намъ центральную точку ω образующей G.

Такимъ образомъ, чтобы найти положеніе центральной точки образующей G, намъ надо вычислить длину отрѣзка

$$v = PR$$

и найти ея предѣлъ, когда Δu стремится къ нулю.

Намъ извѣстно, что общій перпендикуляръ къ двумъ прямымъ опредѣляется какъ линія пересѣченія двухъ плоскостей, при чемъ первая плоскость проходитъ черезъ первую изъ данныхъ прямыхъ и параллельна второй, а вторая плоскость перпендикулярна къ первой плоскости и проходитъ черезъ вторую изъ данныхъ прямыхъ.

Уравненіе плоскости, проходящей черезъ прямую G и параллельной прямой G_1, будетъ

$$\begin{vmatrix} X-\xi, & Y-\eta, & Z-\zeta \\ \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \end{vmatrix} = 0,$$

уравненіе же плоскости, перпендикулярной къ этой плоскости и проходящей черезъ прямую G_1, будетъ

$$\begin{vmatrix} X-\xi_1, & Y-\eta_1, & Z-\zeta_1 \\ \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \\ \mu\nu_1-\mu_1\nu, & \nu\lambda_1-\nu_1\lambda, & \lambda\mu_1-\lambda_1\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Точка R найдется какъ точка встрѣчи послѣдней плоскости съ прямой G, а такъ какъ координаты перемѣнной точки этой послѣдній суть

$$X = \xi + v\lambda$$
$$Y = \eta + v\mu$$
$$Z = \zeta + v\nu,$$

то значеніе параметра v, отвѣчающаго точкѣ R, опредѣлится изъ уравненія

$$\begin{vmatrix} \xi-\xi_1+\lambda v, & \eta-\eta_1+\mu v, & \zeta-\zeta_1+\nu v \\ \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \\ \mu\nu_1-\mu_1\nu, & \nu\lambda_1-\nu_1\lambda, & \lambda\mu_1-\lambda_1\mu \end{vmatrix} = 0$$

или изъ уравненія

$$\begin{vmatrix} \xi-\xi_1, & \eta-\eta_1, & \zeta-\zeta_1 \\ \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \\ \mu\nu_1-\mu_1\nu, & \nu\lambda_1-\nu_1\lambda, & \lambda\mu_1-\lambda_1\mu \end{vmatrix} +$$

$$+ v \begin{vmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \\ \mu\nu_1-\mu_1\nu, & \nu\lambda_1-\nu_1\lambda, & \lambda\mu_1-\lambda_1\mu \end{vmatrix} = 0,$$

откуда, подставляя вмѣсто

$$\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,\ \lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_1$$

ихъ значенія, на основаніи равенствъ (78), развертывая затѣмъ второй изъ опредѣлителей этого уравненія по элементамъ его послѣдней строки и дѣля полученное уравненіе на

$$\Delta u^2,$$

будемъ имѣть

$$\begin{vmatrix} -\frac{\Delta\xi}{\Delta u}\ , & -\frac{\Delta\eta}{\Delta u}\ , & -\frac{\Delta\zeta}{\Delta u} \\ \lambda+\Delta\lambda\ , & \mu+\Delta\mu\ , & \nu+\Delta\nu \\ \mu\frac{\Delta\nu}{\Delta u}-\nu\frac{\Delta\mu}{\Delta u}, & \nu\frac{\Delta\lambda}{\Delta u}-\lambda\frac{\Delta\nu}{\Delta u}, & \lambda\frac{\Delta\mu}{\Delta u}-\mu\frac{\Delta\lambda}{\Delta u} \end{vmatrix} +$$

$$+v\left\{\left(\mu\frac{\Delta\nu}{\Delta u}-\nu\frac{\Delta\mu}{\Delta u}\right)^2+\left(\nu\frac{\Delta\lambda}{\Delta u}-\lambda\frac{\Delta\nu}{\Delta u}\right)^2+\left(\lambda\frac{\Delta\mu}{\Delta u}-\mu\frac{\Delta\lambda}{\Delta u}\right)^2\right\}=0$$

и, слѣдовательно, переходя къ предѣламъ, подводя

$$\Delta u$$

къ нулю, найдемъ, что

$$lim\, v = \frac{\begin{vmatrix} \xi', \eta', \zeta' \\ \lambda, \mu, \nu \\ A, B, C \end{vmatrix}}{A^2+B^2+C^2},$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} A &= \mu\nu'-\nu\mu' \\ B &= \nu\lambda'-\lambda\nu' \\ C &= \lambda\mu'-\mu\lambda' \end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ .\ \text{(78 bis)}$$

Имѣя въ виду, что

$$\begin{vmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ \lambda, & \mu, & \nu \\ A, & B, & C \end{vmatrix} =$$

$$=\xi'(\mu C-\nu B)+\eta'(\nu A-\lambda C)+\zeta'(\lambda B-\mu A)=$$
$$=-\{\xi'\lambda'+\eta'\mu'+\zeta'\nu'\}.$$

такъ какъ

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

и

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0,$$

мы окончательно получимъ, что

$$\lim v = -\frac{\xi'\lambda' + \eta'\mu' + \zeta'\nu'}{A^2 + B^2 + C^2} \ldots \quad (79)$$

Геометрическое мѣсто центральныхъ точекъ образующихъ линейчатой поверхности мы будемъ называть ея **линіей суженія**.

Теорема. *Линія суженія развертывающейся линейчатой поверхности есть ея ребро возврата.*

Въ самомъ дѣлѣ, принявъ ребро возврата развертывающейся линейчатой поверхности за ея направляющую, мы будемъ имѣть

$$\frac{\xi'}{\lambda} = \frac{\eta'}{\mu} = \frac{\zeta'}{\nu},$$

а такъ какъ вообще

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0,$$

то, для разсматриваемаго случая,

$$\xi'\lambda' + \eta'\mu' + \zeta'\nu' = 0$$

и, слѣдовательно,

$$\lim v = 0,$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

67. Предѣлъ отношенія кратчайшаго разстоянія между двумя безконечно близкими производящими линейчатой поверхности къ углу между ними будемъ называть **параметромъ распредѣленія** данной поверхности.

Обозначая кратчайшее разстояніе между производящими G и G_1 линейчатой поверхности черезъ

$$\delta$$

и имѣя въ виду, что это разстояніе есть разстояніе между какой-нибудь точкой прямой G_1 и плоскостью, параллельной этой прямой и проходящей черезъ прямую G, мы будемъ имѣть, что

$$\delta = \frac{\begin{vmatrix} \xi-\xi_1, & \eta-\eta_1, & \zeta-\zeta_1 \\ \lambda & , \mu & , \nu \\ \lambda_1 & , \mu_1 & , \nu_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(\mu\nu_1-\mu_1\nu)^2+(\nu\lambda_1-\nu_1\lambda)^2+(\lambda\mu_1-\lambda_1\mu)^2}}$$

Съ другой стороны, обозначая уголъ между разсматриваемыми производящими черезъ

$$\varphi$$

и принимая во вниманіе, что

$$Cos\,\varphi = \lambda\lambda_1+\mu\mu_1+\nu\nu_1,$$

мы будемъ имѣть

$$Sin\,\varphi = \sqrt{1-(\lambda\lambda_1+\mu\mu_1+\nu\nu_1)^2} =$$
$$= \sqrt{(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)(\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2)-(\lambda\lambda_1+\mu\mu_1+\nu\nu_1)^2} =$$
$$= \sqrt{(\mu\nu_1-\mu_1\nu)^2+(\nu\lambda_1-\nu_1\lambda)^2+(\lambda\mu_1-\lambda_1\mu)^2}.$$

Такимъ образомъ получимъ, что

$$\frac{\delta}{Sin\,\varphi} = \frac{\begin{vmatrix} \xi-\xi_1, & \eta-\eta_1, & \zeta-\zeta_1 \\ \lambda & , \mu & , \nu \\ \lambda_1 & , \mu_1 & , \nu_1 \end{vmatrix}}{(\mu\nu_1-\mu_1\nu)^2+(\nu\lambda_1-\nu_1\lambda)^2+(\lambda\mu_1-\lambda_1\mu)^2},$$

откуда, обозначая параметръ распредѣленія разсматриваемой поверхности черезъ

$$\varkappa,$$

найдемъ, что

$$\varkappa = lim\,\frac{\delta}{\varphi} = lim\,\frac{\delta}{Sin\,\varphi} = lim\,\frac{\begin{vmatrix} \xi-\xi_1, & \eta-\eta_1, & \zeta-\zeta_1 \\ \lambda & , \mu & , \nu \\ \lambda_1 & , \mu_1 & , \nu_1 \end{vmatrix}}{(\mu\nu_1-\mu_1\nu)^2+(\nu\lambda_1-\nu_1\lambda)^2+(\lambda\mu_1-\lambda_1\mu)^2},$$

откуда, дѣля числителя и знаменателя послѣдней дроби на

$$\Delta u^2$$

и переходя къ предѣламъ, подводя

$$\Delta u$$

къ нулю, получимъ, что

$$\varkappa = \frac{D}{A^2 + B^2 + C^2},$$

ибо

$$\lim \left\{ \frac{1}{\Delta u^2} \begin{vmatrix} \xi - \xi_1, & \eta - \eta_1, & \zeta - \zeta_1 \\ \lambda & , \mu & , \nu \\ \lambda_1 & , \mu_1 & , \nu_1 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \lim \left\{ \frac{1}{\Delta u^2} \begin{vmatrix} \xi_1 - \xi, & \eta_1 - \eta, & \zeta_1 - \zeta \\ \lambda_1 - \lambda, & \mu_1 - \mu, & \nu_1 - \nu \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \lim \begin{vmatrix} \frac{\Delta \xi}{\Delta u}, & \frac{\Delta \eta}{\Delta u}, & \frac{\Delta \zeta}{\Delta u} \\ \frac{\Delta \lambda}{\Delta u}, & \frac{\Delta \mu}{\Delta u}, & \frac{\Delta \nu}{\Delta u} \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi', & \eta', & \zeta' \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{vmatrix} = D$$

Теорема. *Параметръ распредѣленія развертывающейся линейчатой поверхности равняется нулю.*

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекаетъ изъ того, что, для развертывающейся линейчатой поверхности, опредѣлитель

$$D = 0$$

68. Въ зависимости отъ величины параметра распредѣленія данной косой линейчатой поверхности, можетъ быть выражено измѣненіе ея касательной плоскости, при перемѣщеніи точки касанія послѣдней вдоль одной и той же образующей.

Чтобы судить объ этомъ измѣненіи, найдемъ тангенсъ угла между касательными плоскостями въ нѣкоторой произвольной точкѣ линейчатой поверхности и въ центральной точкѣ соотвѣтствующей образующей. Полагая, что разстояніе нѣкоторой точки M, разсматриваемой поверхности, отъ соотвѣтствующей центральной точки есть

$$\rho$$

и называя координаты центральной точки черезъ

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,$$

мы можемъ написать уравненіе касательной плоскости въ точкѣ M подъ видомъ

$$\begin{vmatrix} X-\xi\ , & Y-\eta\ , & Z-\zeta \\ \xi'+\lambda'\rho, & \eta'+\mu'\rho, & \zeta'+\nu'\rho \\ \lambda\ , & \mu\ , & \nu \end{vmatrix} = 0,$$

а уравненіе касательной плоскости въ центральной точкѣ подъ видомъ

$$\begin{vmatrix} X-\xi, & Y-\eta, & Z-\zeta \\ \xi'\ , & \eta'\ , & \zeta' \\ \lambda\ , & \mu\ , & \nu \end{vmatrix} = 0,$$

и такъ какъ проекціи на оси координатъ параметра первой изъ этихъ плоскостей будутъ

$$\begin{vmatrix} \eta'+\mu'\rho, & \zeta'+\nu'\rho \\ \mu\ , & \nu \end{vmatrix} = \eta'\nu - \zeta'\mu - \rho A$$

$$\begin{vmatrix} \zeta'+\nu'\rho, & \xi'+\lambda'\rho \\ \nu\ , & \lambda \end{vmatrix} = \zeta'\lambda - \xi'\nu - \rho B$$

$$\begin{vmatrix} \xi'+\lambda'\rho, & \eta'+\mu'\rho \\ \lambda\ , & \mu \end{vmatrix} = \xi'\mu - \eta'\lambda - \rho C,$$

а проекціи на оси координатъ параметра второй изъ нихъ будутъ

$$\eta'\nu - \zeta'\mu;\ \zeta'\lambda - \xi'\nu;\ \xi'\mu - \eta'\lambda,$$

то, обозначая уголъ между разсматриваемыми плоскостями черезъ

$$\theta,$$

по извѣстной [1]) формулѣ аналитической геометріи, мы будемъ имѣть

$$tng\theta = \frac{\sqrt{\rho^2 (E^2 + F^2 + G^2)}}{(\mu\zeta' - \nu\eta')^2 + (\nu\xi' - \lambda\zeta')^2 + (\lambda\eta' - \mu\xi')^2 + \rho K},$$

гдѣ

$$E = A(\nu\xi' - \lambda\zeta') - B(\mu\zeta' - \nu\eta')$$
$$F = B(\lambda\eta' - \mu\xi') - C(\nu\xi' - \lambda\zeta')$$
$$G = C(\mu\zeta' - \nu\eta') - A(\lambda\eta' - \mu\xi')$$

и

$$K = A(\mu\zeta' - \nu\eta') + B(\nu\xi' - \lambda\zeta') + C(\lambda\eta' - \mu\xi')$$

Преобразуемъ полученную формулу. Прежде всего замѣтимъ, что

$$K = A(\mu\zeta' - \nu\eta') + B(\nu\xi' - \lambda\zeta') + C(\lambda\eta' - \mu\xi') =$$
$$= \xi'(B\nu - C\mu) + \eta'(C\lambda - A\nu) + \zeta'(A\mu - B\lambda) =$$
$$= -(\lambda'\xi' + \mu'\eta' + \nu'\zeta') = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (80)$$

---

[1]) Въ курсахъ Аналитической Геометріи уголъ между двумя плоскостями обыкновенно опредѣляютъ по его косинусу формулой

$$Cos\,\theta = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\;\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}},$$

гдѣ

$$A,\ B,\ C \text{ и } A_1,\ B_1,\ C_1$$

суть проекціи на оси координатъ параметровъ этихъ плоскостей.

Имѣя же въ виду, что вообще

$$tng\,\theta = \frac{\sqrt{1 - Cos^2\theta}}{Cos\,\theta},$$

мы можемъ написать, что

$$tng\,\theta = \frac{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A_1^2+B_1^2+C_1^2) - (AA_1 + BB_1 + CC_1)^2}}{AA_1 + BB_1 + CC_1}$$

или, на основаніи тождества Лагранжа, что

$$tng\,\theta = \frac{\sqrt{(AB_1 - A_1B)^2 + (BC_1 - B_1C)^2 + (CA_1 - C_1A)^2}}{AA_1 + BB_1 + CC_1}$$

такъ какъ точка съ координатами

$$\xi,\ \eta,\ \zeta$$

есть центральная точка и для нея, слѣдовательно,

$$v,$$

опредѣляемое формулой (79), равняется нулю.

Далѣе, на основаніи тождества Лагранжа

$$\begin{aligned}[A(\nu\xi'-\lambda\zeta')-B(\mu\zeta'-\nu\eta')]^2+[B(\lambda\eta'-\mu\xi')-C(\nu\xi'-\lambda\zeta')]^2+\\+[C(\mu\zeta'-\nu\eta')-A(\lambda\eta'-\mu\xi')]^2=\\=(A^2+B^2+C^2)\{(\mu\zeta'-\nu\eta')^2+(\nu\xi'-\lambda\zeta')^2+(\lambda\eta'-\mu\xi')^2\}-\\-\{A(\mu\zeta'-\nu\eta')+B(\nu\xi'-\lambda\zeta')+C(\lambda\eta'-\mu\xi')\}^2=\\=(A^2+B^2+C^2)\{(\mu\zeta'-\nu\eta')^2+\\+(\nu\xi'-\lambda\zeta')^2+(\lambda\eta'-\mu\xi')^2\};\quad\ldots\quad(81)\end{aligned}$$

съ другой стороны

$$\begin{aligned}E=A(\nu\xi'-\lambda\zeta')-B(\mu\zeta'-\nu\eta')=\\=\nu(A\xi'+B\eta')-\zeta'(A\lambda+B\mu)=\nu(A\xi'+B\eta')+\zeta'C\nu=\\=\nu(A\xi'+B\eta'+C\zeta')\end{aligned}$$

и точно также

$$\begin{aligned}F=B(\lambda\eta'-\mu\xi')-C(\nu\xi'-\lambda\zeta')=\lambda(A\xi'+B\eta'+C\zeta')\\G=C(\mu\zeta'-\nu\eta')-A(\lambda\eta'-\mu\xi')=\mu(A\xi'+B\eta'+C\zeta'),\end{aligned}$$

а, слѣдовательно,

$$\begin{aligned}[A(\nu\xi'-\lambda\zeta')-B(\mu\zeta'-\nu\eta')]^2+[B(\lambda\eta'-\mu\xi')-C(\nu\xi'-\lambda\zeta')]^2+\\+[C(\mu\zeta'-\nu\eta')-A(\lambda\eta'-\mu\xi')]^2=\\=(A\xi'+B\eta'+C\zeta')^2,\quad\ldots\ldots\quad(82)\end{aligned}$$

сравнивая между собой формулы (81) и (82), найдемъ, что

$$(\mu\zeta'-\nu\eta')^2+(\nu\xi'-\lambda\zeta')^2+(\lambda\eta'-\mu\xi')^2=\frac{(A\xi'+B\eta'+C\zeta')^2}{A^2+B^2+C^2}\quad.\quad(83)$$

и, принимая во вниманіе равенства (80), (82) и (83), получимъ, что

$$tng\,\theta = \frac{\rho\,(A\xi' + B\eta' + C\zeta')}{(A\xi' + B\eta' + C\zeta')^2}\,(A^2 + B^2 + C^2)$$

или, что

$$tng\,\theta = \rho\,\frac{A^2 + B^2 + C^2}{A\xi' + B\eta' + C\zeta'} = \rho\,\frac{A^2 + B^2 + C^2}{D},$$

откуда окончательно будемъ имѣть, что

$$tng\,\theta = \frac{\rho}{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

Эта формула, извѣстная подъ названіемъ **формулы Шаля**, показываетъ, какимъ образомъ измѣняется касательная плоскость къ косой линейчатой поверхности, когда ея точка касанія перемѣщается вдоль одной и той же производящей.

При

$$\rho = 0,$$

мы имѣемъ

$$\theta = 0;$$

по мѣрѣ возрастанія ρ, уголъ θ увеличивается и при

$$\rho = \pm\infty,$$

$$\theta = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Такимъ образомъ мы видимъ, что, по мѣрѣ перемѣщенія точки касанія вдоль производящей линейчатой поверхности, касательная плоскость вращается въ одномъ и томъ же направленіи около этой производящей.

Теорема. *Линейчатыя поверхности, имѣющія одинаковые параметры распредѣленія, имѣютъ одинаковыя измѣненія касательныхъ плоскостей, при одинаковыхъ перемѣщеніяхъ точекъ касанія вдоль соотвѣтственныхъ производящихъ.*

69. **Принимая во вниманіе все изложенное относительно линейчатыхъ поверхностей, мы можемъ высказать слѣдующія теоремы, какъ слѣдствіе теоремы § 61.**

Теорема. *Подвижный и неподвижный аксоиды винтовыхъ осей должны быть или оба развертывающимися линейчатыми поверхностями или оба косыми.*

Теорема. *Если оба аксоида винтовыхъ осей суть косыя линейчатыя поверхности, то они должны имѣть одинаковые параметры распредѣленія, а центральныя точки ихъ общихъ образующихъ и касательныя плоскости къ нимъ въ этихъ точкахъ должны совпадать между собой.*

Теорема. *Если оба аксоида винтовыхъ осей суть развертывающіяся линейчатыя поверхности, то ихъ ребра возврата должны касаться ихъ общей образующей въ одной и той же точкѣ.*

Примѣръ 23. **Вывести уравненія подвижнаго и неподвижнаго аксоидовъ и опредѣлить параметры распредѣленія послѣднихъ, для движенія твердаго тѣла, разсмотрѣннаго въ примѣрѣ 22.**

Для разсматриваемаго нами случая движенія твердаго тѣла, проекціи угловой скорости

$$\omega$$

на оси координатной системы

$$O_1\Xi\Upsilon Z,$$

неизмѣнно связанной съ твердымъ тѣломъ, суть

$$p = \varepsilon \, Sin \, \varepsilon_1 \, t \, Sin \, \delta$$

$$q = \varepsilon \, Cos \, \varepsilon_1 \, t \, Sin \, \delta$$

$$r = \varepsilon \, Cos \, \delta + \varepsilon_1,$$

а проекціи угловой скорости на оси координатной системы

$$OXYZ,$$

неподвижной въ пространствѣ, суть

$$P = \varepsilon_1 \, Sin\, \varepsilon t \, Sin\, \delta$$
$$Q = -\varepsilon_1 \, Cos\, \varepsilon t \, Sin\, \delta$$
$$R = \varepsilon_1 \, Cos\, \delta + \varepsilon.$$

Уравненія мгновенной винтовой оси, относительно координатной системы

$$OXYZ,$$

суть

$$\frac{x - \frac{\rho\varepsilon_1}{\omega^2} Cos\, \varepsilon t\, (\varepsilon_1 + \varepsilon\, Cos\, \delta)}{\varepsilon_1 Sin\, \varepsilon t\, Sin\, \delta} = \frac{y - \frac{\rho\varepsilon_1}{\omega^2} Sin\, \varepsilon t\, (\varepsilon_1 + \varepsilon\, Cos\, \delta)}{-\varepsilon_1 Cos\, \varepsilon t\, Sin\, \delta} =$$
$$= \frac{z}{\varepsilon_1 Cos\, \delta + \varepsilon} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

Чтобы вывести уравненія мгновенной винтовой оси, относительно координатной системы

$$O_1 \Xi \Upsilon Z,$$

найдемъ координаты точки, черезъ которую проходитъ эта ось, по формуламъ (67) предыдущей главы:

$$\alpha = \frac{1}{\omega^2} \left\{ qv_0\, Cos\, (v_0, Z) - rv_0\, Cos\, (v_0, \Upsilon) \right\}$$
$$\beta = \frac{1}{\omega^2} \left\{ rv_0\, Cos\, (v_0, \Xi) - pv_0\, Cos\, (v_0, Z) \right\}$$
$$\gamma = \frac{1}{\omega^2} \left\{ pv_0\, Cos\, (v_0, \Upsilon) - qv_0\, Cos\, (v_0, \Xi) \right\}.$$

Имѣя въ виду, что въ разсматриваемомъ нами случаѣ

$$v_0\, Cos\, (v_0, X) = x_0' = -\rho\varepsilon\, Sin\, \varepsilon t$$
$$v_0\, Cos\, (v_0, Y) = y_0' = \rho\varepsilon\, Cos\, \varepsilon t$$
$$v_0\, Cos\, (v_0, Z) = z_0' = 0,$$

мы будемъ имѣть, что

$$v_0\, Cos\,(v_0, \Xi\,) = x_0' a_1 + y_0' a_2 + z_0' a_3 = \rho\,\varepsilon\, Sin\,\varepsilon_1 t\, Cos\,\delta$$
$$v_0\, Cos\,(v_0, \Upsilon\,) = x_0' b_1 + y_0' b_2 + z_0' b_3 = \rho\,\varepsilon\, Cos\,\varepsilon_1 t\, Cos\,\delta$$
$$v_0\, Cos\,(v_0, Z\,) = x_0' c_1 + y_0' c_2 + z_0' c_3 = -\,\rho\,\varepsilon\, Sin\,\delta$$

и такимъ образомъ получимъ, что

$$\alpha = -\frac{\rho\varepsilon}{\omega^2}\left\{\varepsilon + \varepsilon_1\, Cos\,\delta\right\} Cos\,\varepsilon_1 t$$

$$\beta = \frac{\rho\varepsilon}{\omega^2}\left\{\varepsilon + \varepsilon_1\, Cos\,\delta\right\} Sin\,\varepsilon_1 t$$

$$\gamma = 0.$$

Слѣдовательно, уравненія мгновенной винтовой оси, относительно координатной системы

$$O_1\, \Xi\Upsilon Z,$$

будутъ имѣть видъ

$$\frac{\xi + \frac{\rho\varepsilon}{\omega^2}\left\{\varepsilon + \varepsilon_1\, Cos\,\delta\right\} Cos\,\varepsilon_1 t}{\varepsilon\, Sin\,\varepsilon_1 t\, Sin\,\delta} = \frac{\eta - \frac{\rho\varepsilon}{\omega^2}\left\{\varepsilon + \varepsilon_1\, Cos\,\delta\right\} Sin\,\varepsilon_1 t}{\varepsilon\, Cos\,\varepsilon_1 t\, Sin\,\delta} =$$
$$\frac{\zeta}{\varepsilon\, Cos\,\delta + \varepsilon_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

Чтобы вывести уравненіе неподвижнаго аксоида, мы должны исключить t изъ уравненій (85), для того же, чтобы найти уравненіе подвижнаго аксоида, надо исключить t изъ уравненій (86).

Изъ уравненій (85) мы будемъ имѣть

$$x = \frac{\rho\varepsilon_1}{\omega^2}(\varepsilon_1 + \varepsilon\, Cos\,\delta)\; Cos\,\varepsilon t + z\varepsilon_1 \frac{Sin\,\varepsilon t\, Sin\,\delta}{\varepsilon_1\, Cos\,\delta + \varepsilon}$$

$$y = \frac{\rho\varepsilon_1}{\omega^2}(\varepsilon_1 + \varepsilon\, Cos\,\delta)\; Sin\,\varepsilon t - z\varepsilon_1 \frac{Cos\,\varepsilon t\, Sin\,\delta}{\varepsilon_1\, Cos\,\delta + \varepsilon},$$

откуда, возвышая въ квадратъ и складывая полученныя равенства, найдемъ

$$x^2 + y^2 = \frac{\rho^2\varepsilon_1^{\,2}}{\omega^4}(\varepsilon_1 + \varepsilon Cos\delta)^2 + z^2\,\varepsilon_1^{\,2}\,\frac{Sin^2\,\delta}{(\varepsilon_1\, Cos\,\delta + \varepsilon)^2},$$

а полагая, для краткости письма, что

$$\frac{\rho\varepsilon_1}{\omega^2}(\varepsilon_1 + \varepsilon\, Cos\,\delta) = M$$

и

$$\frac{\varepsilon_1\, Cos\,\delta + \varepsilon}{\varepsilon_1\, Sin\,\delta} = N,$$

получимъ, что

$$x^2 + y^2 = M^2 + \frac{z^2}{N^2}$$

и такимъ образомъ найдемъ уравненіе неподвижнаго аксоида подъ видомъ

$$\frac{x^2+y^2}{M^2} - \frac{z^2}{M^2 N^2} = 1,$$

откуда видимъ, что неподвижный аксоидъ есть однополый гиперболоидъ вращенія около оси OZ.

Точно также изъ уравненій (86) получимъ

$$\xi = -\frac{\rho\varepsilon}{\omega^2}(\varepsilon + \varepsilon_1\, Cos\,\delta)\, Cos\,\varepsilon_1 t + \zeta\varepsilon\frac{Sin\,\varepsilon_1 t\, Sin\,\delta}{\varepsilon\, Cos\,\delta + \varepsilon_1}$$

$$\eta = \frac{\rho\varepsilon}{\omega^2}(\varepsilon + \varepsilon_1\, Cos\,\delta)\, Sin\,\varepsilon_1 t + \zeta\varepsilon\frac{Cos\,\varepsilon_1 t\, Sin\,\delta}{\varepsilon\, Cos\,\delta + \varepsilon_1},$$

откуда будемъ имѣть, что

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{\rho^2\varepsilon^2}{\omega^4}(\varepsilon + \varepsilon_1\, Cos\,\delta)^2 + \zeta^2\varepsilon^2\frac{Sin^2\,\delta}{(\varepsilon\, Cos\,\delta + \varepsilon_1)^2},$$

а принимая во вниманіе, что

$$\rho - M = \rho - \frac{\rho\varepsilon_1}{\omega^2}(\varepsilon_1 + \varepsilon\, Cos\,\delta) =$$

$$= \frac{\rho\varepsilon}{\omega^2}(\varepsilon + \varepsilon_1\, Cos\,\delta),$$

и полагая, что

$$\frac{\varepsilon\, Cos\,\delta + \varepsilon_1}{\varepsilon\, Sin\,\delta} = Q,$$

получимъ уравненіе подвижнаго аксоида подъ видомъ

$$\frac{\xi^2+\eta^2}{(\rho - M)^2} - \frac{\zeta^2}{Q^2(\rho - M)^2} = 1$$

и такимъ образомъ найдемъ, что и подвижный аксоидъ есть однополый гиперболоидъ вращенія.

Переходя къ опредѣленію параметра распредѣленія

$$\varkappa = \frac{D}{A^2 + B^2 + C^2},$$

для производящей неподвижнаго аксоида, по формуламъ (78, bis), гдѣ

$$\lambda = \frac{\varepsilon_1}{\omega} Sin\, \varepsilon t\, Sin\, \delta$$

$$\mu = -\frac{\varepsilon_1}{\omega} Cos\, \varepsilon t\, Sin\, \delta$$

$$\nu = \frac{1}{\omega}(\varepsilon_1 Cos\, \delta + \varepsilon),$$

мы будемъ имѣть

$$A = -\frac{\varepsilon\varepsilon_1}{\omega^2}(\varepsilon + \varepsilon_1 Cos\, \delta)\, Sin\, \varepsilon t\, Sin\, \delta$$

$$B = \frac{\varepsilon\varepsilon_1}{\omega^2}(\varepsilon + \varepsilon_1 Cos\, \delta)\, Cos\, \varepsilon t\, Sin\, \delta$$

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_1^2}{\omega^2} Sin^2\, \delta$$

и, слѣдовательно,

$$A^2 + B^2 + C^2 = \frac{\varepsilon^2\varepsilon_1^2}{\omega^4} Sin^2\, \delta \left\{(\varepsilon + \varepsilon_1 Cos\, \delta)^2 + \varepsilon_1^2 Sin^2\, \delta\right\} =$$
$$= \frac{\varepsilon^2\varepsilon_1^2}{\omega^2} Sin^2\, \delta.$$

Съ другой стороны

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{\rho\varepsilon\varepsilon_1}{\omega^2} Sin\, \varepsilon t\, (\varepsilon_1 + \varepsilon\, Cos\, \delta); & \frac{\rho\varepsilon\varepsilon_1}{\omega^2} Cos\, \varepsilon t\, (\varepsilon_1 + \varepsilon\, Cos\, \delta); & 0 \\ \frac{\varepsilon_1\varepsilon}{\omega} Cos\, \varepsilon t\, Sin\, \delta; & \frac{\varepsilon\varepsilon_1}{\omega} Sin\, \varepsilon t\, Sin\, \delta; & 0 \\ \frac{\varepsilon_1}{\omega} Sin\, \varepsilon t\, Sin\, \delta; & -\frac{\varepsilon_1}{\omega} Cos\, \varepsilon t\, Sin\, \delta; & \frac{1}{\omega}\{\varepsilon_1 Cos\delta + \varepsilon\} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\rho\varepsilon^2\varepsilon_1^2}{\omega^4}(\varepsilon_1\, Cos\, \delta + \varepsilon)(\varepsilon_1 + \varepsilon\, Cos\, \delta)\, Sin\, \delta \begin{vmatrix} -Sin\, \varepsilon t, & Cos\, \varepsilon t \\ Cos\, \varepsilon t, & Sin\, \varepsilon t \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\rho\varepsilon^2\varepsilon_1^2}{\omega^4}(\varepsilon_1 + \varepsilon\, Cos\, \delta)(\varepsilon + \varepsilon_1\, Cos\, \delta)\, Sin\, \delta.$$

Слѣдовательно, параметръ распредѣленія неподвижнаго аксоида будетъ

$$\varkappa = -\frac{\rho}{\omega^2 Sin\,\delta}(\varepsilon_1 + \varepsilon\,Cos\,\delta)(\varepsilon + \varepsilon_1\,Cos\,\delta).$$

Для подвижнаго аксоида мы будемъ имѣть

$$A = \frac{\varepsilon\varepsilon_1}{\omega^2}(\varepsilon\,Cos\,\delta + \varepsilon_1)\,Sin\,\varepsilon_1 t\,Sin\,\delta$$

$$B = \frac{\varepsilon\varepsilon_1}{\omega^2}(\varepsilon\,Cos\,\delta + \varepsilon_1)\,Cos\,\varepsilon_1 t\,Sin\,\delta$$

$$C = -\frac{\varepsilon_1\varepsilon^2}{\omega^2}\,Sin^2\,\delta$$

и, слѣдовательно,

$$A^2 + B^2 + C^2 = \frac{\varepsilon^2\varepsilon_1^2}{\omega^2}\,Sin^2\,\delta;$$

затѣмъ найдемъ, что

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\rho\varepsilon\varepsilon_1}{\omega^2}(\varepsilon + \varepsilon_1\,Cos\,\delta)\,Sin\,\varepsilon_1 t; & \frac{\rho\varepsilon\varepsilon_1}{\omega^2}(\varepsilon + \varepsilon_1\,Cos\,\delta)\,Cos\,\varepsilon_1 t; & 0 \\ \frac{\varepsilon\varepsilon_1}{\omega}\,Cos\,\varepsilon_1 t\,Sin\,\delta; & -\frac{\varepsilon\varepsilon_1}{\omega}\,Sin\,\varepsilon_1 t\,Sin\,\delta; & 0 \\ \frac{\varepsilon}{\omega}\,Sin\,\varepsilon_1 t\,Sin\,\delta; & \frac{\varepsilon}{\omega}\,Cos\,\varepsilon_1 t\,Sin\,\delta; & \frac{1}{\omega}\{\varepsilon\,Cos\,\delta + \varepsilon_1\} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\rho\,\varepsilon^2\varepsilon_1^2}{\omega^4}(\varepsilon\,Cos\,\delta + \varepsilon_1)(\varepsilon + \varepsilon_1\,Cos\,\delta)\,Sin\,\delta \begin{vmatrix} Sin\,\varepsilon_1 t; & Cos\,\varepsilon_1 t \\ Cos\,\varepsilon_1 t; & Sin\,\varepsilon_1 t \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\rho\,\varepsilon^2\varepsilon_1^2}{\omega^4}(\varepsilon_1\,Cos\,\delta + \varepsilon)(\varepsilon\,Cos\,\delta + \varepsilon_1)\,Sin\,\delta.$$

Слѣдовательно, параметръ распредѣленія подвижнаго аксоида будетъ

$$\varkappa_1 = -\frac{\rho}{\omega^2 Sin\,\delta}(\varepsilon_1 + \varepsilon\,Cos\,\delta)(\varepsilon + \varepsilon_1\,Cos\,\delta),$$

откуда, между прочимъ, мы видимъ, что

$$\varkappa = \varkappa_1,$$

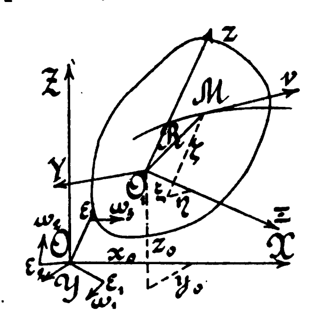
какъ и слѣдовало ожидать.

Глава VII.

Ускореніе абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній.

Ускоренія точекъ твердаго тѣла.

70. Положимъ, что нѣкоторая точка M движется внутри твердаго тѣла (черт. 73) и что ея относительное движеніе



Черт. 73.

и движеніе твердаго тѣла заданы такъ же, какъ въ главѣ V. Назовемъ абсолютную скорость точки M черезъ

$$v,$$

а ея абсолютное ускореніе черезъ

$$a$$

и найдемъ проекціи этого ускоренія на оси координатной системы

$$O_1 \Xi \Upsilon Z,$$

неизмѣнно связанной съ твердымъ тѣломъ.

По общей формулѣ, для проекцій ускоренія на подвижное направленіе, мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} a\,Cos(a,\Xi) &= \frac{d\left\{v\,Cos(v,\Xi)\right\}}{dt} - v\omega_1\,Cos(v,\omega_1) \\ a\,Cos(a,\Upsilon) &= \frac{d\left\{v\,Cos(v,\Upsilon)\right\}}{dt} - v\omega_2\,Cos(v,\omega_2) \\ a\,Cos(a,Z) &= \frac{d\left\{v\,Cos(v,Z)\right\}}{dt} - v\omega_3\,Cos(v,\omega_3) \end{aligned}\right\}, \quad (87)$$

гдѣ скорости

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$$

имѣютъ тѣ же значенія, какъ и въ главѣ V.

Пологая, для краткости письма, что

$$\begin{aligned} v\,Cos(v,\Xi) &= v_\xi \\ v\,Cos(v,\Upsilon) &= v_\eta \\ v\,Cos(v,Z) &= v_\zeta \end{aligned}$$

и имѣя въ виду, что въ такомъ случаѣ

$$\begin{aligned} v\omega_1\,Cos(v,\omega_1) &= v_\eta\,\omega_{1\eta} + v_\zeta\,\omega_{1\zeta} = v_\eta\,r - v_\zeta\,q \\ v\omega_2\,Cos(v,\omega_2) &= v_\xi\,\omega_{2\xi} + v_\zeta\,\omega_{2\zeta} = v_\zeta\,p - v_\xi\,r \\ v\omega_3\,Cos(v,\omega_3) &= v_\xi\,\omega_{3\xi} + v_\eta\,\omega_{3\eta} = v_\xi\,q - v_\eta\,p, \end{aligned}$$

мы приведемъ формулы (87) къ виду

$$\begin{aligned} a\,Cos(a,\Xi) &= \frac{dv_\xi}{dt} + qv_\zeta - rv_\eta \\ a\,Cos(a,\Upsilon) &= \frac{dv_\eta}{dt} + rv_\xi - pv_\zeta \\ a\,Cos(a,Z) &= \frac{dv_\zeta}{dt} + pv_\eta - qv_\xi \end{aligned}$$

Эти формулы извѣстны подъ названіемъ **формулъ Бура** [1]).

Принимая во вниманіе формулы (46) главы V, выражающія проекціи абсолютной скорости точки M на оси координатной системы, неизмѣнно связанной съ твердымъ тѣломъ, по которому эта точка движется, мы можемъ первую изъ разсматриваемыхъ формулъ представить подъ видомъ

$$a\,Cos\,(a, \Xi) = \xi'' + x_0''a_1 + y_0''a_2 + z_0''a_3 + x_0'a_1' + y_0'a_2' + z_0'a_3' + q'\zeta + q\zeta' - r'\eta - r\eta' + q(\zeta' + x_0'c_1 + y_0'c_2 + z_0'c_3 + p\eta - q\xi) - r(\eta' + x_0'b_1 + y_0'b_2 + z_0'b_3 + r\xi - p\zeta)$$

или

$$a\,Cos\,(a_1\,\Xi) = \zeta'' + x_0''a_1 + y_0''a_2 + z_0''a_3 + x_0'(a_1' + c_1q - b_1r) + y_0'(a_2' + c_2q - b_2r) + z_0'(a_3' + c_3q - b_3r) + q'\zeta - r'\eta + pq\eta + pr\zeta - \xi(q^2 + r^2) + 2(q\zeta' - r\eta')$$

или же, имѣя въ виду формулы (49) и (50), подъ видомъ

$$a\,Cos\,(a, \Xi) = \xi'' + x_0''a_1 + y_0''a_2 + z_0''a_3 + q'\zeta - r'\eta + pq\eta + pr\zeta - \xi(q^2 + r^2) + 2(q\zeta' - r\eta');$$

разсуждая совершенно такъ же, мы получимъ:

$$a\,Cos\,(a, \Upsilon) = \eta'' + x_0''b_1 + y_0''b_2 + z_0''b_3 + r'\xi - p'\zeta + qr\zeta + qp\xi - \eta(r^2 + p^2) + 2(r\xi' - p\zeta')$$

$$a\,Cos\,(a, Z) = \zeta'' + x_0''c_1 + y_0''c_2 + z_0''c_3 + p'\eta - q'\xi + rp\xi + rq\eta - \zeta(p^2 + q^2) + 2(p\eta' - q\xi') \qquad (88)$$

Такимъ образомъ, мы имѣемъ выраженія проекцій на оси системы

$$O_1\,\Xi\Upsilon Z$$

---

[1]) Въ такомъ видѣ формулы даны Буромъ (Bour) въ его мемуарѣ „Mémoire sur les mouvements relatifs“, помѣщенномъ въ Journal de mathématiques pures et appliquées, deuxième serie T. VIII 1863, p. 8.

ускоренія точки M въ ея абсолютномъ движеніи, а слѣдовательно, найдемъ и выраженіе этого ускоренія по формулѣ

$$a = \sqrt{\{a\, Cos(a, \Xi)\}^2 + \{a\, Cos\,(a, \Upsilon)\}^2 + \{a\, Cos(a, Z)\}^2},$$

гдѣ передъ корнемъ слѣдуетъ брать знакъ плюсъ, ибо онъ выражаетъ лишь длину вектора, изображающаго ускореніе, что касается направленія послѣдняго, то оно найдется въ зависимости отъ косинусовъ угловъ, образуемыхъ имъ съ координатными осями, опредѣляемыхъ уравненіями (88).

Если мы предположимъ, что координатная система

$$O_1\,\Xi\,\Upsilon\,Z$$

неподвижна, т. е. если положимъ въ формулахъ (88), что

$$x_0,\quad y_0,\quad z_0$$

суть величины постоянныя и что

$$p = q = r = 0,$$

то правыя части этихъ формулъ представятъ проекціи на оси упомянутой системы ускоренія точки M въ ея относительномъ движеніи и если обозначимъ это ускореніе черезъ

$$a_r,$$

то будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} a_r\, Cos(a_r, \Xi) &= \xi'' \\ a_r\, Cos(a_r, \Upsilon) &= \eta'' \\ a_r\, Cos(a_r, Z) &= \zeta'' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

т. е. будемъ имѣть проекціи на оси системы

$$O_1\,\Xi\Upsilon Z$$

ускоренія относительнаго движенія точки M, имѣя же эти проекціи, найдемъ величину этого ускоренія по формулѣ

$$a_r = \sqrt{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2},$$

гдѣ передъ корнемъ надо брать знакъ плюсъ; направленіе относительнаго ускоренія опредѣлится косинусами угловъ, образуемыхъ имъ съ координатными осями, которыя опредѣлятся на основаніи формулъ (89).

Если въ формулахъ (88) мы предположимъ, что

$$\xi,\ \eta,\ \zeta$$

суть величины постоянныя, то правыя части этихъ формулъ выразятъ проекціи на оси системы

$$O_1\,\Xi\,\Upsilon\,Z$$

ускоренія точки M въ ея переносномъ движеніи и, обозначая это ускореніе черезъ

$$a_e\,,$$

мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned}
a_e\,Cos(a_e\,,\Xi) &= x_0''a_1 + y_0''a_2 + z_0''a_3 + q'\zeta - r'\eta + \\
&\quad + pq\eta + pr\zeta - \xi(q^2 + r^2) \\
a_e\,Cos(a_e\,,\Upsilon) &= x_0''b_1 + y_0''b_2 + z_0''b_3 + r'\xi - p'\zeta + \\
&\quad + qr\zeta + qp\xi - \eta(r^2 + p^2) \\
a_e\,Cos(a_e\,,Z) &= x_0''c_1 + y_0''c_2 + z_0''c_3 + p'\eta - q'\xi + \\
&\quad + rp\xi + rq\eta - \zeta(p^2 + q^2)
\end{aligned}\right\} \quad (90)$$

Величина ускоренія переноснаго движенія опредѣлится по формулѣ

$$a_e = \sqrt{\left\{a_e\,Cos(a_e\,,\Xi)\right\}^2 + \left\{a_e\,Cos(a_e\,,\Upsilon)\right\}^2 + \left\{a_e\,Cos(a_e\,,Z)\right\}^2},$$

гдѣ передъ корнемъ слѣдуетъ брать знакъ плюсъ, а его направленіе—косинусами угловъ, образуемыхъ ими съ координатными осями, опредѣляемыми формулами (90).

Теорема Коріолиса. *Ускореніе абсолютнаго движенія точки, въ каждый моментъ времени, есть геометрическая сумма ускореній ея относительнаго и переноснаго движеній*

и добавочнаго ускоренія, которое представляетъ изъ себя удвоенный моментъ угловой скорости, построенной при данной точкѣ, относительно конца вектора, изображающаго ея относительную скорость.

Сопоставляя между собой формулы (88), (89) и (90), мы будемъ имѣть

$$a \, Cos\,(a, \Xi) = a_r \, Cos\,(a_r, \Xi) + a_e \, Cos\,(a_e, \Xi) + \\ + 2\,(q\zeta' - r\eta')$$

$$a \, Cos\,(a, \Upsilon) = a_r \, Cos\,(a_r, \Upsilon) + a_e \, Cos\,(a_e, \Upsilon) + \\ + 2\,(r\xi' - p\zeta')$$

$$a \, Cos\,(a, Z) = a_r \, Cos\,(a_r, Z) + a_e \, Cos\,(a_e, Z) + \\ + 2\,(p\eta' - q\xi').$$

Разсматривая эти формулы, мы видимъ, что двучлены

$$2\,(q\zeta' - r\eta'); \;\; 2\,(r\xi' - p\zeta'); \;\; 2\,(p\eta' - q\xi')$$

представляютъ изъ себя проекціи на оси системы

$$O_1\,\Xi\Upsilon Z$$

нѣкотораго вектора, выражающагося въ единицахъ ускоренія и, слѣдовательно, представляющаго нѣкоторое ускореніе точки M. Это ускореніе, которое обыкновенно называютъ **добавочнымъ** или **поворотнымъ ускореніемъ**, или же **ускореніемъ Коріолиса**, мы будемъ обозначать черезъ

$$a_c$$

т. е. будемъ полагать, что

$$\left.\begin{aligned} a_c \, Cos\,(a_c, \Xi) &= 2\,(q\zeta' - r\eta') \\ a_c \, Cos\,(a_c, \Upsilon) &= 2\,(r\xi' - p\zeta') \\ a_c \, Cos\,(a_c, Z) &= 2\,(p\eta' - q\xi') \end{aligned}\right\} \quad . \;\; . \;\; . \;\; (92)$$

Имѣя въ виду, что

$$\xi', \; \eta', \; \zeta'$$

суть проекціи на оси системы

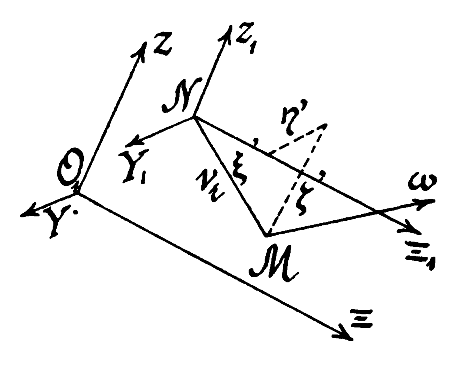
$$O, \Xi \Upsilon Z$$

относительной скорости

$$v_r$$

точки M (черт. 74), мы видимъ, что если, при точкѣ N, лежащей въ концѣ скорости v_r, мы построимъ координатную систему

$$N\Xi_1 \Upsilon_1 Z_1,$$



Черт. 74.

то точка M будетъ имѣть, относительно построенной координатной системы, координаты

$$-\xi', \ -\eta', \ -\zeta',$$

а такъ какъ проекціи на эти оси угловой скорости

$$\omega$$

суть

$$p, \ q, \ r,$$

то мы будемъ имѣть, что

$$M_{\Xi_1}(\omega) = q\zeta' - r\eta'$$
$$M_{\Upsilon_1}(\omega) = r\xi' - p\zeta'$$
$$M_{Z_1}(\omega) = p\eta' - q\xi',$$

откуда, сравнивая полученныя формулы съ формулами (92), видимъ, что

$$a_c = 2\overline{M_N(\omega)}$$

т. е. приходимъ къ заключенію, что ускореніе Коріолиса какой-нибудь точки или ея добавочное ускореніе является удвоеннымъ моментомъ угловой скорости, построенной при этой точкѣ, относительно конца ея относительной скорости.

Принимая во вниманіе вышеизложенное, мы можемъ формулы (88) представить подъ видомъ

$$a\, Cos\,(a, \Xi) = a_r\, Cos\,(a_r, \Xi) + a_e\, Cos\,(a_e, \Xi) + a_c\, Cos\,(a_c, \Xi)$$
$$a\, Cos\,(a, \Upsilon) = a_r\, Cos\,(a_r, \Upsilon) + a_e\, Cos\,(a_e, \Upsilon) + a_c\, Cos\,(a_c, \Upsilon)$$
$$a\, Cos\,(a, Z) = a_r\, Cos\,(a_r, Z) + a_e\, Cos\,(a_e, Z) + a_c\, Cos\,(a_c, Z),$$

откуда заключаемъ, что

$$\bar{a} = \bar{a_r} + \bar{a_e} + \bar{a_c}$$

и, слѣдовательно, предложенная теорема доказана.

Примѣръ 24. Опредѣлить ускоренія абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движенія и ускореніе Коріолиса точки, движущейся равномѣрно по меридіану сферической поверхности, центръ которой движется равномѣрно по окружности, описанной около нѣкоторой неподвижной точки O и которая равномѣрно вращается около своей оси, остающейся все время параллельной самой себѣ, при условіи, что въ началѣ движенія движущаяся точка находится въ сѣверномъ полюсѣ сферы, по которой она движется, а ось вращенія этой сферы находится въ одной плоскости съ перпендикуляромъ къ плоскости траекторіи ея центра, возстановленнымъ изъ точки O (см. примѣръ 17).

Мы видѣли, что въ этомъ случаѣ относительныя координаты движущейся точки суть:

$$\xi = \rho_1 \, Sin \, \lambda t$$
$$\eta = 0$$
$$\zeta = \rho_1 \, Cos \, \lambda t;$$

координаты полюса суть:

$$x_0 = \rho \, Cos \, \mu t$$
$$y_0 = \rho \, Sin \, \mu t$$
$$z_0 = 0;$$

Эйлеровы углы суть:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \frac{\pi}{2} - \nu t, \quad \theta = \alpha;$$

девять косинусовъ, опредѣляющихъ положенія осей подвижной координатной системы, относительно осей неподвижной, суть:

$$a_1 = - Cos \, \nu t \, Cos \, \alpha, \quad a_2 = Sin \, \nu t, \quad a_3 = Cos \, \nu t \, Sin \, \alpha$$
$$b_1 = - Sin \, \nu t \, Cos \, \alpha, \quad b_2 = - Cos \, \nu t, \quad b_3 = Sin \, \nu t \, Sin \, \alpha$$
$$c_1 = Sin \, \alpha \quad , \quad c_2 = 0 \quad , \quad c_3 = Cos \, \alpha$$

и проекціи на оси системы

$$O_1 \, \Xi \, \Upsilon Z$$

угловой скорости

$$\omega$$

суть:

$$p = 0, \; q = 0, \; r = - \nu$$

Принимая во вниманіе значенія приведенныхъ элементовъ, на основаніи формулъ (89), мы будемъ имѣть

$$a_r \, Cos \, (a_r, \Xi) = - \rho_1 \lambda^2 \, Sin \, \lambda t$$
$$a_r \, Cos \, (a_r, \Upsilon) = 0$$
$$a_r \, Cos \, (a_r, Z) = - \rho_1 \lambda^2 \, Cos \, \lambda t$$

и слѣдовательно получимъ, что

$$a_r = \sqrt{\rho_1^2 \lambda^4 Sin^2 \lambda t + \rho_1^2 \lambda^4 Cos^2 \lambda t} = \rho_1 \lambda^2$$

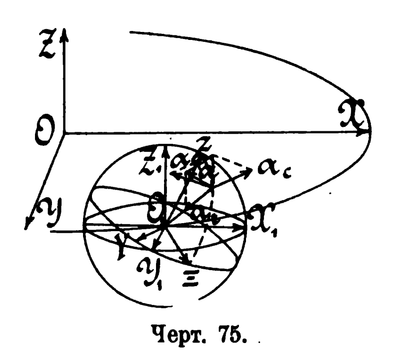
и

$$Cos\,(a_r, \Xi) = - Sin\,\lambda t$$

$$Cos\,(a_r, \Upsilon) = 0$$

$$Cos\,(a_r, Z) = - Cos\,\lambda t,$$

откуда видно, что, въ разсматриваемомъ случаѣ, относительное ускореніе точки M направлено по радіусу сферы, по которой эта точка движется, къ центру этой сферы (черт. 75).



Черт. 75.

На основаніи формулъ (90), мы будемъ имѣть

$$a_e\, Cos\,(a_e, \Xi) = \rho\mu^2\, Cos\,\mu t\, Cos\,\nu t\, Cos\,\alpha - \rho\mu^2\, Sin\,\mu t\, Sin\,\nu t - \\ - \rho_1 \nu^2\, Sin\,\lambda t$$

$$a_e\, Cos\,(a_e, \Upsilon) = \rho\mu^2\, Cos\,\mu t\, Sin\,\nu t\, Cos\,\alpha + \rho\mu^2\, Sin\,\mu t\, Cos\,\nu t$$

$$a_e\, Cos\,(a_e, Z) = - \mu\rho^2\, Cos\,\mu t\, Sin\,\alpha$$

и, слѣдовательно, получимъ, что ускореніе переноснаго движенія

$$a_e =$$

$$= \sqrt{\rho^2\mu^4 + \rho_1^2 \nu^4\, Sin^2 \lambda t - 2\rho\rho_1 \mu^2\nu^2\, Sin\,\lambda t \{Cos\,\mu t\, Cos\,\nu t\, Cos\,\alpha + \\ + Sin\,\mu t\, Sin\,\nu t\}}$$

и слѣдовательно, что

$$Cos\,(a_e, \Xi) =$$

$$= \frac{\rho\mu^2 (Cos\,\mu t\; Cos\,\nu t\; Cos\,\alpha - Sin\,\mu t\; Sin\,\nu t) - \rho_1 \nu^2\, Sin\,\lambda t}{\sqrt{\rho^2\mu^4 + \rho_1^2 \nu^4\, Sin^2 \lambda t - 2\rho\rho_1 \mu^2 \nu^2\, Sin\,\lambda t\,\{ Cos\,\mu t\; Cos\,\nu t\; Cos\,\alpha + Sin\,\mu t\; Sin\,\nu t \}}}$$

$$Cos\,a_e, \Upsilon) =$$

$$= \frac{\rho\mu^2 (Cos\,\mu t\; Sin\,\nu t\; Cos\,\alpha + Sin\,\mu t\; Cos\,\nu t)}{\sqrt{\rho^2\mu^4 + \rho_1^2 \nu^4\, Sin^2 \lambda t - 2\rho\rho_1 \mu^2 \nu^2\, Sin\,\lambda t\,\{ Cos\,\mu t\; Cos\,\nu t\; Cos\,\alpha + Sin\,\mu t\; Sin\,\nu t \}}}$$

$$Cos\,(a_e, Z) =$$

$$= \frac{-\rho\mu^2\, Cos\,\mu t\; Sin\,\alpha}{\sqrt{\rho^2\mu^4 + \rho_1^2 \nu^4\, Sin^2 \lambda t - 2\rho\rho_1 \mu^2 \nu^2\, Sin\,\lambda t\,\{ Cos\,\mu t\; Cos\,\nu t\; Cos\,\alpha + Sin\,\mu t\; Sin\,\alpha\,\nu t \}}}$$

Проекціи на оси подвижной системы ускоренія Коріолиса точки M будутъ

$$a_c\, Cos\,(a_c, \Xi) = 0$$

$$a_c\, Cos\,(a_c, \Upsilon) = -\,2\,\nu\lambda\rho_1\; Cos\,\lambda t$$

$$a_c\, Cos\,(a_c, Z) = 0$$

Слѣдовательно, ускореніе Коріолиса, въ разсматриваемомъ нами случаѣ, будетъ

$$a_c = 2\,\nu\lambda\rho_1\; Cos\,\lambda t$$

и мы будемъ имѣть, что

$$Cos\,(a_c, \Xi) = 0, \quad Cos\,(a_c, \Upsilon) = -1, \quad Cos\,(a_c, Z) = 0,$$

откуда видимъ, что ускореніе Коріолиса параллельно оси

$$O_1\Upsilon$$

и направлено въ сторону обратную ея направленію.

Зная ускореніе относительнаго и переноснаго движенія точки M и ея поворотное ускореніе, найдемъ и ускореніе въ ея абсолютномъ движеніи.

71. Формулы (90), выражающія проекціи на оси координатной системы

$$O_1\,\Xi\,\Upsilon\,Z$$

ускоренія переноснаго движенія точки, въ то же время, при постоянныхъ

$$\xi, \eta, \zeta,$$

выражаютъ проекціи на эти оси ускоренія точекъ твердаго тѣла, при его движеніи.

Прежде чѣмъ перейти къ разсмотрѣнію этихъ ускореній въ общемъ случаѣ движенія твердаго тѣла, докажемъ нѣкоторыя теоремы и установимъ нѣкоторыя опредѣленія, которыя понадобятся намъ въ послѣдующемъ изложеніи.

Теорема. *При поступательномъ движеніи твердаго тѣла, ускоренія всѣхъ его точекъ геометрически равны между собой и геометрически равны ускоренію его точки, принятой за полюсъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, имѣя въ виду, что, при поступательномъ движеніи твердаго тѣла,

$$p = q = r = 0$$

и называя ускореніе какой-нибудь его точки M черезъ

$$a,$$

на основаніи формулъ (90), мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} a \operatorname{Cos}(a, \Xi) &= x''_0 a_1 + y''_0 a_2 + z''_0 a_3 \\ a \operatorname{Cos}(a, \Upsilon) &= x''_0 b_1 + y''_0 b_2 + z''_0 b_3 \\ a \operatorname{Cos}(a, Z) &= x''_0 c_1 + y''_0 c_2 + z''_0 c_3 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (93)$$

а такъ какъ

$$x''_0, \; y''_0, \; z''_0$$

суть проекціи на оси координатной системы

$$OXYZ$$

ускоренія точки O_1, принятой за полюсъ, то, называя это ускореніе черезъ

$$a_0,$$

мы будемъ имѣть

$$a\,Cos\,(a,\ \Xi) = a_0\,Cos\,(a_0, \Xi)$$
$$a\,Cos\,(a,\ \Upsilon) = a_0\,Cos\,(a_0, \Upsilon)$$
$$a\,Cos\,(a, Z) = a_0\,Cos\,(a_0, Z),$$

откуда видимъ, что

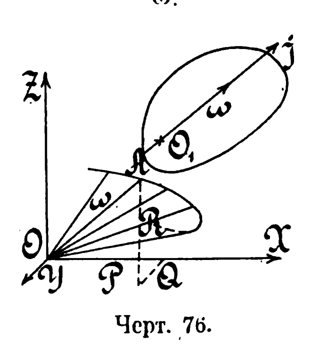
$$\bar{a} = a_0,$$

что и доказываетъ предложенную намъ теорему.

72. Геометрическое мѣсто концовъ векторовъ, построенныхъ при нѣкоторой неподвижной точкѣ пространства и геометрически равныхъ угловымъ скоростямъ, при движенiи нѣкотораго твердаго тѣла, будемъ называть **годографомъ угловыхъ скоростей** даннаго движенiя.

Построивъ годографъ угловыхъ скоростей нѣкотораго движенiя, при началѣ неподвижной координатной системы (черт. 76), мы видимъ, что координаты его перемѣнной точки суть проекцiи на оси этой системы угловой скорости

$$\omega.$$



Черт. 76.

Имѣя въ виду, что эти проекцiи, вообще говоря, суть функцiи отъ времени, т. е., что

$$P = f_1(t),\quad Q = f_2(t),\ R = f_3(t),$$

мы получимъ уравненiе годографа, исключая t изъ этихъ уравненiй.

Геометрическое приращеніе угловой скорости, за нѣкоторый промежутокъ времени, будемъ называть **пріобрѣтенною угловою скоростью** за этотъ промежутокъ.

Отношеніе пріобрѣтенной угловой скорости, за нѣкоторый промежутокъ времени, къ самому промежутку, будемъ называть **среднимъ угловымъ ускореніемъ** за этотъ промежутокъ времени.

Предѣлъ средняго углового ускоренія, за безконечно малый промежутокъ времени, прилегающій къ нѣкоторому моменту времени, будемъ называть **угловымъ ускореніемъ** въ этотъ моментъ времени.

Такимъ образомъ, если мы положимъ, что нѣкоторое твердое тѣло, двигаясь въ пространствѣ, въ нѣкоторый моментъ времени t имѣетъ угловую скорость

$$\omega,$$

а въ моментъ времени

$$t_1 = t + \Delta t$$

имѣетъ угловую скорость

$$\omega_1,$$

то

$$\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}$$

есть пріобрѣтенная этимъ твердымъ тѣломъ угловая скорость за промежутокъ времени

$$\Delta t;$$

обозначая же среднее угловое ускореніе разсматриваемаго твердаго тѣла, за этотъ промежутокъ времени, черезъ

$$\tau_{cp},$$

а его угловое ускореніе, въ моментъ времени t, черезъ

$$\tau,$$

мы будемъ имѣть, что

$$\tau_{cp} = \frac{\overline{\omega_1} - \overline{\omega}}{\Delta t}$$

и что

$$\tau = lim\,(\tau_{cp}) = lim\left(\frac{\overline{\omega_1} - \overline{\omega}}{\Delta t}\right)$$

73. Чтобы установить единицу углового ускоренія, разсмотримъ одинъ частный случай движенія твердаго тѣла, а именно, его равноперемѣнное вращеніе около неподвижной оси.

Если твердое тѣло будетъ вращаться около неподвижной оси, то годографъ его угловыхъ скоростей обратится въ прямую, лежащую на этой оси, и его угловое ускореніе будетъ

$$\tau = \frac{d\omega}{dt}$$

Равноперемѣннымъ вращеніемъ твердаго тѣла около неподвижной оси будемъ называть такое его вращеніе, во все время котораго угловое ускореніе остается постояннымъ по величинѣ, при чемъ, если оно положительное, то мы будемъ называть вращеніе **равноускореннымъ**, если же оно отрицательное, то **равнозамедленнымъ**.

Изъ приведенныхъ опредѣленій слѣдуетъ, что, если твердое тѣло имѣетъ равноускоренное вращеніе около неподвижной оси, то его угловое ускореніе

$$\tau = \frac{\omega_1 - \omega}{t_1 - t}$$

Полагая же въ этомъ равенствѣ, что

$$t_1 - t = 1$$

и

$$\omega_1 - \omega = 1,$$

получимъ, что и

$$\tau = 1,$$

откуда заключаемъ, что **единица углового ускоренія** есть угловое ускореніе такого равноускореннаго вращенія твердаго

тѣла около неподвижной оси, при которомъ, въ единицу времени, угловая скорость тѣла увеличивается на одну единицу угловыхъ скоростей.

Символъ единицы углового ускоренія есть

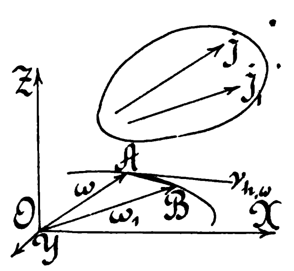
$$\frac{1}{T^2} = T^{-2}$$

74. **Теорема**. *Угловое ускореніе твердаго тѣла, въ любой моментъ времени, геометрически равняется скорости въ движеніи точки по годографу угловыхъ скоростей этого тѣла, въ соотвѣтственный моментъ времени.*

Въ самомъ дѣлѣ, полагая, что въ моментъ времени t нѣкоторое тѣло имѣетъ угловую скорость ω, а въ моментъ времени $t_1 = t + \Delta t$ угловую скорость ω_1, по предыдущему мы будемъ имѣть, что угловое ускореніе этого тѣла въ моментъ времени t будетъ

$$\tau = lim\left(\frac{\omega_1 - \omega}{\Delta t}\right)$$

Съ другой стороны, полагая, что нѣкоторая точка движется по годографу скоростей разсматриваемаго нами твердаго тѣла, построенному, напримѣръ, при началѣ неподвижной координатной системы (черт. 77), такъ что въ моментъ времени t находится въ точкѣ A—концѣ вектора ω, а въ моментъ времени t_1—въ точкѣ B—концѣ вектора ω_1 и называя скорость движенія этой точки черезъ



Черт. 77.

$$v_{h\omega},$$

мы видимъ, что въ моментъ времени t

$$v_{h\omega} = lim\left(\frac{\widehat{AB}}{\Delta l}\right) = lim\left(\frac{\overline{AB}}{\Delta t}\right) = lim\left(\frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}}{\Delta t}\right),$$

откуда заключаемъ, что

$$\tau = v_{h\omega},$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

Имѣя въ виду, что координаты перемѣнной точки годографа угловыхъ скоростей, построеннаго при началѣ неподвижной координатной системы, какъ было уже замѣчено выше, суть

$$P, Q, R,$$

мы видимъ, что

$$v_{h\omega}\, Cos\,(v_{h\omega}, X) = \tau\, Cos\,(\tau, X) = P'$$
$$v_{h\omega}\, Cos\,(v_{h\omega}, Y) = \tau\, Cos\,(\tau, Y) = Q'$$
$$v_{h\omega}\, Cos\,(v_{h\omega}, Z) = \tau\, Cos\,(\tau, Z) = R'$$

и такимъ образомъ находимъ, что

$$\tau = \sqrt{P'^2 + Q'^2 + R'^2},$$

гдѣ передъ корнемъ слѣдуетъ брать знакъ плюсъ, и что

$$Cos\,(\tau, X) = \frac{P'}{\sqrt{P'^2 + Q'^2 + R'^2}}$$

$$Cos\,(\tau, Y) = \frac{Q'}{\sqrt{P'^2 + Q'^2 + R'^2}}$$

$$Cos\,(\tau, Z) = \frac{R'}{\sqrt{P'^2 + Q'^2 + R'^2}}$$

т. е. находимъ формулы, по которымъ можемъ опредѣлить величину и направленіе угловаго ускоренія твердаго тѣла въ любой моментъ времени.

Замѣтимъ, что, на основаніи изложеннаго, мы видимъ, что

$$\tau\, Cos\,(\tau, \Xi) = p',\ \ \tau\, Cos\,(\tau, \Upsilon) = q',\ \ \tau\, Cos\,(\tau, Z) = r'$$

и что, слѣдовательно,

$$\tau = \sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2}$$

и

$$Cos\,(\tau, \Xi) = \frac{p'}{\sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2}}$$

$$Cos\,(\tau, \Upsilon) = \frac{q'}{\sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2}}$$

$$Cos\,(\tau, Z) = \frac{r'}{\sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2}}$$

Примѣръ 25. Найти уравненіе годографа угловыхъ скоростей и угловое ускореніе твердаго тѣла, движущагося въ условіяхъ примѣра 22.

Мы видѣли, что, при движеніи твердаго тѣла, при упомянутыхъ условіяхъ,

$$P = \varepsilon_1\, Sin\, \varepsilon t\, Sin\, \delta$$

$$Q = -\, \varepsilon_1\, Cos\, \varepsilon t\, Sin\, \delta$$

$$R = \varepsilon + \varepsilon_1\, Cos\, \delta$$

Исключая t изъ первыхъ двухъ изъ этихъ уравненій, мы будемъ имѣть

$$P^2 + Q^2 = \varepsilon_1^{\,2}\, Sin^2\, \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93,\ \text{bis})$$

и такимъ образомъ видимъ, что годографомъ угловыхъ скоростей, въ разсматриваемомъ случаѣ, является окружность пересѣченія плоскости, опредѣляемой уравненіемъ

$$R = \varepsilon + \varepsilon_1\, Cos\, \delta$$

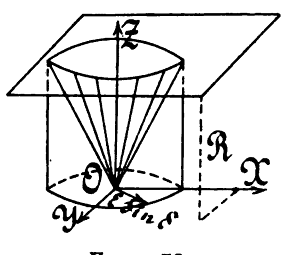
и, слѣдовательно, параллельной плоскости XOY, ибо

ε, ε_1 и δ

суть постоянныя величины, и кругового цилиндра, опредѣляемаго уравненіемъ (93, bis), т. е. имѣющаго осью вращенія OZ и радіусомъ основанія

$$\varepsilon_1 \, Sin \, \delta$$

(черт. 78).



Черт. 78.

Затѣмъ

$$P' = \varepsilon\varepsilon_1 \, Cos \, \varepsilon t \, Sin \, \delta$$

$$Q' = \varepsilon\varepsilon_1 \, Sin \, \varepsilon t \, Sin \, \delta$$

$$R' = 0$$

а, слѣдовательно, угловое ускореніе

$$\tau = \varepsilon\varepsilon_1 Sin \, \delta$$

и

$$Cos(\tau, X) = Cos \, \varepsilon t; \quad Cos(\tau, Y) = Sin \, \varepsilon t; \quad Cos(\tau, Z) = 0$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что, въ разсматриваемомъ нами случаѣ движенія, угловое ускореніе твердаго тѣла постоянно по величинѣ, параллельно плоскости XOY и лежитъ въ плоскости

$$ZOO_1Z$$

(см. черт. 68 примѣра 22).

75. **Теорема Ривальса** (Rivals). *При вращательномъ движеніи твердаго тѣла, ускореніе его любой точки, въ каждый моментъ времени, есть геометрическая сумма двухъ ускореній:*

вращательнаго, *которое представляетъ изъ себя моментъ,*

относительно данной точки, углового ускоренія тѣла, проведеннаго изъ его неподвижной точки,

и **осестремительнаго,** *равнаго квадрату угловой скорости въ соотвѣтствующій моментъ времени, умноженному на разстояніе данной точки, до соотвѣтствующаго разсматриваемому моменту времени, положенія мгновенной оси, и направленнаго по перпендикуляру, опущенному изъ данной точки на направленіе этой оси.*

Предполагая, что твердое тѣло имѣетъ неподвижную точку и что начало координатной системы

$$O_1 \Xi \Upsilon Z$$

лежитъ въ этой точкѣ, т. е. полагая въ формулахъ (90), что

$$x_0, y_0, z_0$$

суть величины постоянныя, мы получимъ проекціи на оси упомянутой системы ускореній какой-нибудь точки твердаго тѣла, при его вращательномъ движеніи, подъ видомъ

$$\left.\begin{aligned} a \operatorname{Cos}(a, \Xi) &= q'\zeta - r'\eta + pq\eta + pr\zeta - \xi\,(q^2 + r^2) \\ a \operatorname{Cos}(a, \Upsilon) &= r'\xi - p'\zeta + qr\zeta + qp\xi - \eta\,(r^2 + p^2) \\ a \operatorname{Cos}(a, Z) &= p'\eta - q'\xi + rp\xi + rq\eta - \zeta\,(p^2 + q^2) \end{aligned}\right\} . (94)$$

Принимая во вниманіе, что

$$p', q', r'$$

суть проекціи на оси системы

$$O_1 \Xi \Upsilon Z$$

(черт. 79) углового ускоренія τ разсматриваемаго нами тѣла, мы видимъ, что первые два члена правыхъ частей каждой изъ полученныхъ формулъ представляютъ изъ себя моменты, относительно осей, проведенныхъ изъ точки M съ координатами

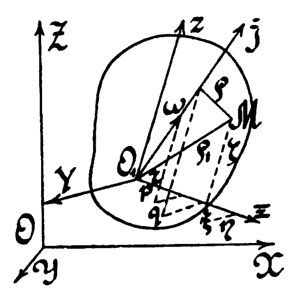
$$\xi, \eta, \zeta$$

параллельно осямъ системы

$$O\,\Xi\,\Upsilon\,Z,$$

углового ускоренія, построеннаго при точкѣ O, т. е., что

$$M_{\Xi_1}(\tau) = q'\zeta - r'\eta$$
$$M_{\Upsilon_1}(\tau) = r'\xi - p'\zeta$$
$$M_{Z_1}(\tau) = p'\eta - q'\xi$$



Черт. 79.

Такимъ образомъ, называя векторъ, являющійся моментомъ, относительно точки M твердаго тѣла, углового ускоренія этого тѣла, построеннаго при его неподвижной точкѣ, **вращательнымъ ускореніемъ** данной точки и обозначая его черезъ

$$a_R,$$

мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} a_R \, Cos\,(a_R, \Xi) &= q'\zeta - r'\eta \\ a_R \, Cos\,(a_R, \Upsilon) &= r'\xi - p'\zeta \\ a_R \, Cos\,(a_R, Z) &= p'\eta - q'\xi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (95)$$

Векторъ, проекціи котораго на оси системы

$$O_1\,\Xi\,\Upsilon\,Z$$

выражаются остальными слагаемыми правыхъ частей фор-

мулъ (94), назовемъ **осестремительнымъ ускореніемъ** точки M нашего твердаго тѣла и обозначимъ черезъ

$$a_J$$

т. е. положимъ, что

$$\left.\begin{aligned} a_J \, Cos\,(a_J, \Xi) &= pq\eta + pr\zeta - \xi\,(q^2 + r^2) \\ a_J \, Cos\,(a_J, \Upsilon) &= qr\zeta + qp\xi - \eta\,(r^2 + p^2) \\ a_J \, Cos\,(a_J, Z) &= rp\xi + rq\eta - \zeta\,(p^2 + q^2) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (96)$$

Эти формулы могутъ быть приведены къ виду

$$a_J \, Cos\,(a_J, \Xi) = p\,(p\xi + q\eta + r\zeta) - \xi\,(p^2 + q^2 + r^2) =$$
$$= p\omega\rho_1 \, Cos\,(\omega, \rho_1) - \xi\omega^2$$
$$a_J \, Cos\,(a_J, \Upsilon) = q\,(p\xi + q\eta + r\zeta) - \eta\,(p^2 + q^2 + r^2) =$$
$$= q\omega\rho_1 \, Cos\,(\omega, \rho_1) - \eta\omega^2$$
$$a_J \, Cos\,(a_J, Z) = r\,(p\xi + q\eta + r\zeta) - \zeta\,(p^2 + q^2 + r^2) =$$
$$= r\omega\rho_1 \, Cos\,(\omega, \rho_1) - \zeta\omega^2,$$

гдѣ ρ_1 есть радіусъ векторъ точки M относительно точки O_1. Опустивъ изъ точки M перпендикуляръ на мгновенную ось и называя длину этого перпендикуляра черезъ

$$\rho,$$

а его основаніе буквой N, мы видимъ, что координаты точки N, относительно системы

$$O_1\Xi\Upsilon Z,$$

будутъ

$$\xi_1 = \rho_1 \, Cos\,(\rho_1, \omega) \, Cos\,(J, \Xi) = \rho_1 \, Cos\,(\rho_1, \omega)\,\frac{p}{\omega}$$

$$\eta_1 = \rho_1 \, Cos\,(\rho_1, \omega) \, Cos\,(J, \Upsilon) = \rho_1 \, Cos\,(\rho_1, \omega)\,\frac{q}{\omega}$$

$$\zeta_1 = \rho_1 \, Cos\,(\rho_1, \omega) \, Cos\,(J, Z) = \rho_1 \, Cos\,(\rho_1, \omega)\,\frac{r}{\omega}$$

и, слѣдовательно, можемъ написать, что

$$a_J \, Cos\,(a_J\,, \Xi) = \omega^2\,(\xi_1 - \xi)$$
$$a_J \, Cos\,(a_J\,, \Upsilon) = \omega^2\,(\eta_1 - \eta)$$
$$a_J \, Cos\,(a_J\,, Z) = \omega^2\,(\zeta_1 - \zeta)$$

или

$$a_J \, Cos\,(a_J\,, \Xi) = \omega^2 \rho \; Cos\,(\rho, \Xi)$$
$$a_J \, Cos\,(a_J\,, \Upsilon) = \omega^2 \rho \; Cos\,(\rho, \Upsilon)$$
$$a_J \, Cos\,(a_J\,, Z) = \omega^2 \rho \; Cos\,(\rho, Z),$$

откуда видимъ, что

$$a_J = \rho\omega^2$$

и что

$$a_J$$

направлено по перпендикуляру, опущенному изъ точки M на мгновенную ось J.

Сопоставляя между собой формулы (94), (95) и (96), мы видимъ, что

$$a \, Cos\,(a, \Xi) = a_R \, Cos\,(a_R\,, \Xi) + a_J \, Cos\,(a_J\,, \Xi)$$
$$a \, Cos\,(a, \Upsilon) = a_R \, Cos\,(a_R\,, \Upsilon) + a_J \, Cos\,(a_J\,, \Upsilon)$$
$$a \, Cos\,(a, Z) = a_R \, Cos\,(a_R\,, Z) + a_J \, Cos\,(a_J\,, Z),$$

откуда

$$\overline{a} = \overline{a_R} + \overline{a_J}\,,$$

при чемъ

$$a_R = M_M\,(\tau)_0,$$

и

$$a_J = \rho\omega^2$$

и предложенная теорема, такимъ образомъ, доказана.

Чтобы построить, для нѣкотораго момента времени, ускореніе какой-нибудь точки твердаго тѣла, при его вращатель-

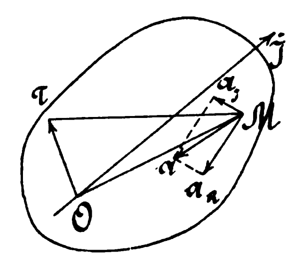
номъ движеніи, надо изъ данной точки опустить перпендикуляръ на направленіе мгновенной оси и отложить на этомъ перпендикулярѣ отъ данной точки по направленію къ мгновенной оси отрѣзокъ

$$a_J = \rho\omega^2$$

(черт. 80); затѣмъ построить при данной точкѣ M отрѣзокъ

$$a_R = M_M(\tau)$$

т. е. отрѣзокъ, численно равный удвоенной площади треугольника, построеннаго на точкѣ M и векторѣ τ, перпенди-



Черт. 80.

кулярный къ плоскости этого треугольника и направленный такъ, чтобы, стоя по его направленію, наблюдатель видѣлъ векторъ τ направленнымъ слѣва направо. Геометрическая сумма построенныхъ такимъ образомъ отрѣзковъ

$$a_R \text{ и } a_J$$

и будетъ ускореніе

$$a$$

точки M.

Въ случаѣ движенія твердаго тѣла около неподвижной оси

$$a_J \perp a_R,$$

такъ какъ тогда угловое ускореніе направлено вдоль этой оси, и мы, слѣдовательно, будемъ имѣть, что

$$a = \sqrt{a_R^2 + a_J^2},$$

но такъ какъ тогда

$$\tau = \frac{d\omega}{dt} = \omega'$$

и

$$M_M(\tau) = \rho\tau = \rho\omega',$$

гдѣ

$$\rho$$

есть разстояніе точки M твердаго тѣла отъ его оси вращенія, то

$$a = \rho\sqrt{\omega'^2 + \omega^4}.$$

Примѣръ 26. Опредѣлить осестремительное и вращательное ускоренія точки M, лежащей на оси O_1Z въ разстояніи l отъ точки O_1 твердаго тѣла, вращающагося около этой точки, если его движеніе задано, посредствомъ заданія Эйлеровыхъ угловъ, уравненіями

$$\varphi = \varepsilon t$$

$$\psi = \varepsilon_1 t$$

$$\theta = \delta.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ проекціи угловой скорости на оси системы

$$O_1\Xi\Upsilon Z$$

будутъ:

$$p = \varepsilon \, Sin\, \varepsilon_1 t \, Sin\, \delta$$

$$q = \varepsilon \, Cos\, \varepsilon_1 t \, Sin\, \delta$$

$$r = \varepsilon \, Cos\, \delta + \varepsilon_1$$

угловая скорость

$$\omega = \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon_1{}^2 + 2\,\varepsilon\varepsilon_1 \, Cos\, \delta}$$

уравненія мгновенной оси имѣютъ видъ

$$\frac{\xi}{Sin\, \varepsilon_1 t \, Sin\, \delta} = \frac{\eta}{Cos\, \varepsilon_1 t \, Sin\, \delta} = \frac{\zeta}{Cos\, \delta + \varepsilon_1}.$$

Слѣдовательно, проекціи на оси системы

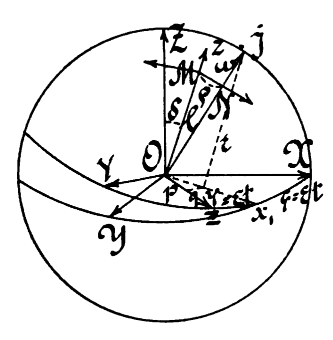
$$O_1\Xi\Upsilon Z$$

вращательнаго ускоренія точки M (черт. 81) съ координатами

$$\xi = \eta = 0, \quad \zeta = l$$

будутъ:

$$a_R \, Cos\,(a_R\,,\,\Xi) = -\,l\varepsilon\varepsilon_1\, Sin\,\varepsilon_1\, t\, Sin\,\delta$$
$$a_R \, Cos\,(a_R\,,\,\Upsilon) = -\,t\varepsilon\varepsilon_1\, Cos\,\varepsilon_1\, t\, Sin\,\delta$$
$$a_R \, Cos\,(a_R\,,\,Z) = 0,$$



Черт. 81.

а вращательное ускореніе этой точки будетъ

$$a_R = l\,\varepsilon\varepsilon_1\, Sin\,\delta$$

и мы будемъ имѣть, что

$$Cos(a_R,\Xi) = -\,Sin\,\varepsilon_1 t; \quad Cos\,(a_R,\Upsilon) = -\,Cos\,\varepsilon_1 t; \quad Cos\,(a_R, Z) = 0.$$

Разстояніе точки M отъ мгновенной оси будетъ

$$\rho = l\, Sin\,\delta$$

и, слѣдовательно, осестремительное ускореніе этой точки будетъ

$$a_J = l\,(\varepsilon^2 + \varepsilon_1{}^2 + 2\,\varepsilon\varepsilon_1\, Cos\,\delta)\, Sin\,\delta$$

Полное ускореніе точки M опредѣлится по формулѣ

$$a = \sqrt{a_R^2 + a_J^2 + 2a_R\, a_J\, Cos\,(a_R, a_J)}\,.$$

76. **Теорема.** *Въ общемъ случаѣ движенія твердаго тѣла, ускореніе его любой точки, въ нѣкоторый моментъ времени, есть геометрическая сумма трехъ ускореній:*

ускоренія точки, принятой за полюсъ,

вращательнаго ускоренія *данной точки, равнаго моменту, относительно этой точки, углового ускоренія твердаго тѣла въ разсматриваемый моментъ времени, построеннаго при точкѣ, принятой за полюсъ,*

и **осестремительнаго ускоренія** *данной точки, равнаго квадрату угловой скорости тѣла, помноженному на разстояніе этой точки до мгновенной оси, проходящей, въ разсматриваемый моментъ времени, черезъ полюсъ, и направленнаго по перпендикуляру, опущенному изъ данной точки на направленіе упомянутой мгновенной оси.*

Въ самомъ дѣлѣ, сопоставляя между собой формулы (90), (93) и (96), мы будемъ имѣть

$$a\, Cos\,(a, \Xi) = a_0 Cos\,(a_0, \Xi) + a_R\, Cos\,(a_R, \Xi) + a_J Cos\,(a_J\,, \Xi)$$
$$a\, Cos\,(a, \Upsilon) = a_0 Cos\,(a_0, \Upsilon) + a_R\, Cos\,(a_R, \Upsilon) + a_J Cos\,(a_J\,, \Upsilon)$$
$$a\, Cos\,(a, Z) = a_0 Cos\,(a_0, Z) + a_R\, Cos\,(a_R, Z) + a_J Cos\,(a_J\,, Z),$$

откуда видимъ, что

$$a = \overline{a_0} + \overline{a_R} + \overline{a_J},$$

причемъ, по предыдущему,

$$a_R = M_M\,(\tau)_0,$$

и

$$a_J = \rho\omega^2,$$

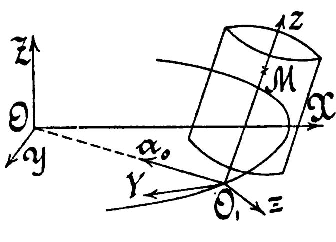
гдѣ ρ есть разстояніе разсматриваемой нами точки твердаго тѣла до мгновенной оси, проведенной черезъ его точку, при-

нятую за полюсъ, и, слѣдовательно, предложенная теорема доказана.

Примѣръ 27. Опредѣлить ускореніе точки M, лежащей на оси O_1Z въ разстояніи l отъ точки O_1 твердаго тѣла, движущагося въ условіяхъ примѣра 22.

Въ этомъ случаѣ координаты точки O_1, принятой за полюсъ (черт. 82), суть:

$$x_0 = \rho \, Cos \, \varepsilon t$$
$$y_0 = \rho \, Sin \, \varepsilon t$$
$$z_0 = 0,$$



Черт. 82.

а Эйлеровы углы суть:

$$\varphi = \varepsilon t, \quad \psi = \varepsilon_1 t, \quad \theta = \delta;$$

слѣдовательно, вращательное и осестремительное ускоренія точки M будутъ тѣ же, что и въ предыдущемъ примѣрѣ (примѣръ 26), т. е. мы будемъ имѣть, что

$$a_R = l\varepsilon\varepsilon_1 \, Sin \, \delta$$
$$Cos\,(a_R, \Xi) = - \, Sin \, \varepsilon_1 t, \; Cos\,(a_R, \Upsilon) = - Cos \, \varepsilon_1 t,$$
$$Cos\,(a_R, Z) = 0$$

и что

$$a_J = l\omega^2 \, Sin \, \delta$$
$$Cos\,(a_J, \Xi) = - \, Sin \, \varepsilon_1 t \, Cos \, \delta, \; Cos\,(a_J, \Upsilon) = - \, Cos \, \varepsilon_1 t \, Cos \, \delta,$$
$$Cos\,(a_J, Z) = Sin \, \delta.$$

Что касается ускоренія точки O_1, принятой за полюсъ разсматриваемаго твердаго тѣла, то

$$a_0 \, Cos\,(a_0, X) = -\rho\varepsilon^2 \, Cos\, \varepsilon t$$
$$a_0 \, Cos\,(a_0, Y) = -\rho\varepsilon^2 \, Sin\, \varepsilon t$$
$$a_0 \, Cos\,(a_0, Z) = 0,$$

откуда

$$a_0 = \rho\varepsilon^2$$
$$Cos\,(a_0, X) = -\,Cos\,\varepsilon t,\;\; Cos\,(a_0, Y) = -\,Sin\,\varepsilon t,\; Cos\,(a_0, Z) = 0$$

и слѣдовательно

$$Cos\,(a_0, \Xi) = a_1\,Cos\,(a_0, X) + a_2\,Cos\,(a_0, Y) + \\ + a_3\,Cos\,(a_0, Z) = -\,Cos\,\varepsilon_1 t$$
$$Cos\,(a_0, \Upsilon) = b_1\,Cos\,(a_0, X) + b_2\,Cos\,(a_0, Y) + \\ + b_3\,Cos\,(a_0, Z) = -\,Sin\,\varepsilon_1 t$$
$$Cos\,(a_0, Z) = c_1\,Cos\,(a_0, X) + c_2\,Cos\,(a_0, Y) + \\ + c_3\,Cos\,(a_0, Z) = 0.$$

Полное ускореніе точки M

$$\bar{a} = a_0 + a_R + a_J$$

и слѣдовательно

$$a = \sqrt{\begin{matrix} a_0^2 + a_R^2 + a_J^2 + 2a_0 a_R\,Cos\,(a_0 a_R) + \\ + 2a_0 a_J\,Cos\,(a_0 a_J) + 2a_R a_J\,Cos\,(a_R a_J). \end{matrix}}$$

а такъ какъ

$$Cos\,(a_0, a_R) = Sin\,\varepsilon_1 t\; Cos\,\varepsilon_1 t + Sin\,\varepsilon_1 t\; Cos\,\varepsilon_1 t = Sin\,2\varepsilon_1 t$$
$$Cos\,(a_0, a_J) = Sin\,\varepsilon_1 t\; Cos\,\varepsilon_1 t\; Cos\,\delta + Sin\,\varepsilon_1 t\; Cos\,\varepsilon_1 t\; Cos\,\delta = \\ = Sin\,2\varepsilon_1 t\; Cos\,\delta,$$

то

$$a = \sqrt{\begin{gathered} l^2\varepsilon^2\varepsilon_1{}^2 Sin^2\delta + l^2\omega^4 Sin^2\delta + \rho^2\varepsilon^4 + 2l\rho\,\varepsilon^3\varepsilon_1 Sin\delta\, Sin2\varepsilon_1 t + \\ + 2\rho l\varepsilon^2\omega^2 Sin\delta\, Cos\delta\, Sin 2\varepsilon_1 t + 2l^2\varepsilon\varepsilon_1\omega^2 Sin^2\delta\, Cos\delta \end{gathered}}$$

или

$$a = \varepsilon\varepsilon_1 \sqrt{\begin{gathered} l^2 Sin^2\delta + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right)^2 \left(l^2 \frac{\omega^4}{\varepsilon^4} Sin^2\delta + \rho^2\right) + \\ + 2l\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} Sin\delta\left[l\frac{\omega^2}{2\varepsilon^2} Sin 2\delta + \rho Sin 2\varepsilon_1 t\left(1 + \frac{\omega^2}{\varepsilon\varepsilon_1} Cos\delta\right)\right] \end{gathered}}.$$

77. **Теорема**. *При движеніи всякаго твердаго тѣла, въ каждый моментъ времени, въ немъ имѣется точка, ускореніе которой равняется нулю.*

Въ самомъ дѣлѣ, полагая, что ускореніе нѣкоторой точки твердаго тѣла равняется нулю, на основаніи формулъ (90), мы видимъ, что ея координаты въ такомъ случаѣ должны быть связаны между собой системою трехъ уравненій

$$x_0''a_1 + y_0''a_2 + z_0''a_3 + q'\zeta - r'\eta + pq\eta + pr\zeta - \xi(q^2 + r^2) = 0$$
$$x_0''b_1 + y_0''b_2 + z_0''b_3 + r'\xi - p'\zeta + qr\zeta + qp\xi - \eta(r^2 + p^2) = 0$$
$$x_0''c_1 + y_0''c_2 + z_0''c_3 + p'\eta - q'\xi + rp\xi + rq\eta - \zeta(p^2 + q^2) = 0$$

или

$$\begin{gathered} -\xi(q^2 + r^2) + \eta(pq - r') + \zeta(pr + q') + \\ + x_0''a_1 + y_0''a_2 + z_0''a_3 = 0 \\ \xi(pq + r') - \eta(r^2 + p^2) + \zeta(qr - p') + \\ + x_0''b_1 + y_0''b_2 + z_0''b_3 = 0 \\ \xi(pr - q') + \eta(qr + p') - \zeta(p^2 + q^2) + \\ + x_0''c_1 + y_0''c_2 + z_0''c_3 = 0, \end{gathered}$$

а такъ какъ опредѣлитель этой системы уравненій

$$\Delta = \begin{vmatrix} -(q^2+r^2)\,; & pq - r'\,; & pr + q' \\ pq + r'\,; & -(r^2+p^2)\,; & qr - p' \\ pr - q'\,; & qr + p'\,; & -(p^2+q^2) \end{vmatrix} =$$
$$= -\{(pq' - qp')^2 + (qr' - rq')^2 + (rp' - pr')^2\};$$

вообще говоря, не равняется нулю, то она имѣетъ опредѣленную и единственную систему рѣшеній, и, слѣдовательно, наша теорема доказана.

Въ частномъ случаѣ, когда во все время движенія

$$\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'},$$

опредѣлитель

$$\Delta = 0,$$

но тогда угловое ускореніе совпадаетъ по направленію съ угловой скоростью и, слѣдовательно, движеніе твердаго тѣла происходитъ такъ, что его винтовая ось все время остается параллельной самой себѣ.

Принявъ за ось

$$O_1Z$$

прямую параллельную общему направленію винтовой оси, т. е., полагая, что

$$p = q = 0,$$

мы приведемъ уравненія, опредѣляющія координаты той точки, въ которой ускореніе равняется нулю, къ виду

$$-\xi r^2 - \eta r' + x_0''a_1 + y_0''a_2 + z_0''a_3 = 0$$
$$\xi r' - \eta r^2 + x_0''b_1 + y_0''b_2 + z_0''b_3 = 0$$
$$x_0''c_1 + y_0''c_2 + z_0''c_3 = 0.$$

Послѣднее изъ полученныхъ уравненій показываетъ, что

$$a_0 \, Cos\,(a_0, Z) = 0,$$

откуда мы заключаемъ, что, если, при движеніи твердаго тѣла, его винтовая ось все время остается параллельной самой себѣ и если при этомъ имѣется такая точка, ускореніе которой равняется нулю, то поступательное движеніе твердаго тѣла по направленію винтовой оси равномѣрно ($a_0 \, Cos\,(a_0, Z) = 0$) и въ тѣлѣ имѣется безчисленное множество точекъ, ускоренія которыхъ равняются нулю, при

чемъ всѣ эти точки расположены на прямой, опредѣляемой уравненіями

$$\xi r^2 + \eta r' - x_0''a_1 - y_0''a_2 - z_0''a_3 = 0$$

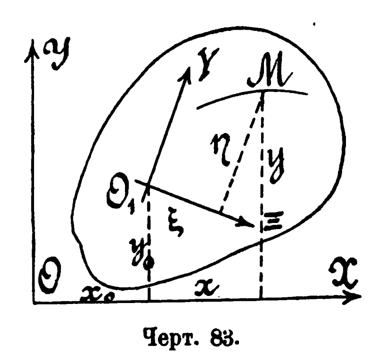
$$\xi r' - \eta r^2 + x_0''b_1 + y_0''b_2 + z_0''b_3 = 0$$

Точку твердаго тѣла, ускореніе которой въ данный моментъ времени равняется нулю, мы будемъ называть **центромъ ускореній** этого твердаго тѣла въ разсматриваемый моментъ времени.

Глава VIII.

Движеніе плоской фигуры въ ея плоскости.

78. Положимъ, что мы имѣемъ нѣкоторую плоскую фигуру S, какъ-нибудь движущуюся въ ея плоскости, относительно нѣкоторой прямоугольной координатной системы XYZ (черт. 83), которую мы будемъ считать неподвижною; положимъ затѣмъ, что нѣкоторая точка M движется по разсматриваемой нами фигурѣ, описывая на ней траекторію AB.



Черт. 83.

Возьмемъ координатную систему

$$\Xi O_1 \Upsilon,$$

неизмѣнно связанную съ разсматриваемой нами фигурой и положимъ, что движеніе точки M, по отношенію къ этой системѣ, задано, посредствомъ заданія ея координатъ

$$\xi, \eta$$

въ функціяхъ отъ времени, а движеніе плоской фигуры— посредствомъ заданія въ функціяхъ отъ времени координатъ

$$x_0, y_0$$

ея полюса O_1 и угла

$$\psi = (O_1 \Xi, OX).$$

Въ такомъ случаѣ, называя абсолютныя координаты точки M черезъ

$$x, \ y,$$

мы будемъ имѣть формулы

$$\left. \begin{array}{l} x = x_0 + \xi \, Cos \, \psi - \eta \, Sin \, \psi \\ y = y_0 + \xi \, Sin \, \psi + \eta \, Cos \, \psi \end{array} \right\}, \quad \ldots \ldots (97)$$

по которымъ найдемъ абсолютное движеніе точки, когда заданы ея относительное движеніе и переносное, т. е. движеніе той плоской фигуры, относительно которой она движется; разсматривая же въ этихъ формулахъ координаты

$$\xi \text{ и } \eta$$

какъ постоянныя, мы видимъ, что онѣ опредѣляютъ движеніе точки M плоской фигуры, относительно неподвижной координатной системы XOY.

Замѣтимъ, что формулы (97) могли бы быть получены и изъ общихъ формулъ (25) главы IV, полагая въ нихъ

$$z = 0, \quad \zeta = 0$$

и

$$\varphi = \theta = 0 \quad .$$

Примѣръ 28. Опредѣлить движеніе точекъ плоской фигуры, если одна изъ ея точекъ равномѣрно движется вдоль нѣкоторой прямой, а вся фигура равномѣрно вращается около этой точки.

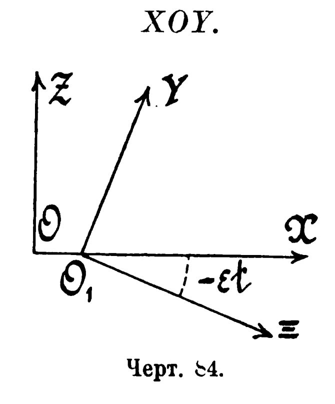
Примемъ прямую, по которой движется полюсъ O_1 разсматриваемой нами фигуры, за ось OX (черт. 84) и поло-

женіе этого полюса въ началѣ движенія за начало неподвижной координатной системы и положимъ, что въ началѣ движенія оси системы

$$\Xi O_1 \Upsilon,$$

неизмѣнно связанной съ движущейся фигурой, совпадаютъ съ осями

$$XOY.$$



Черт. 84.

Въ такомъ случаѣ, полагая, что точка, движущаяся вдоль оси OX, въ единицу времени проходитъ нѣкоторый отрѣзокъ k, а фигура поворачивается на уголъ ε, мы видимъ, что координаты полюса будутъ

$$x_0 = kt$$
$$y_0 = 0$$

и что

$$\psi = -\varepsilon t,$$

а потому будемъ имѣть

$$x = kt + \xi \, Cos \, \varepsilon t + \eta \, Sin \, \varepsilon t$$
$$y = \quad - \xi \, Sin \, \varepsilon t + \eta \, Cos \, \varepsilon t$$

Исключая изъ этихъ уравненій t, мы получимъ уравненіе траекторіи любой точки разсматриваемой плоской фигуры. Возвышая съ этой цѣлью полученныя уравненія въ квадратъ, а затѣмъ складывая ихъ между собой, мы получимъ

$$(x - kt)^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2$$

или

$$(x-kt)^2+y^2=\rho^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

гдѣ

$$\rho$$

есть разстояніе точки плоской фигуры отъ ея полюса.

Изъ уравненій (98) найдемъ, что

$$t=\frac{x-\sqrt{\rho^2-y^2}}{k}$$

и такимъ образомъ получимъ искомое уравненіе траекторіи подъ видомъ

$$y=-\xi\, Sin\frac{\varepsilon\left(x-\sqrt{\rho^2-y^2}\right)}{k}+\eta\, Cos\frac{\varepsilon\left(x-\sqrt{\rho^2-y^2}\right)}{k}$$

Для точки, лежащей на оси

$$O_1 Y$$

въ разстояніи ρ отъ полюса, мы будемъ имѣть, что

$$x=kt+\rho\, Sin\, \varepsilon t$$
$$y=\rho\, Cos\, \varepsilon t$$

и уравненіе траекторіи подъ видомъ

$$y=\rho\, Cos\frac{\varepsilon\left(x-\sqrt{\rho^2-y^2}\right)}{k}$$

Въ частномъ случаѣ, для точки, лежащей въ разстояніи

$$\rho=\frac{k}{\varepsilon}$$

отъ полюса, мы будемъ имѣть

$$x=\rho\,(\varepsilon t+Sin\, \varepsilon t)$$
$$y=\rho\, Cos\, \varepsilon t$$

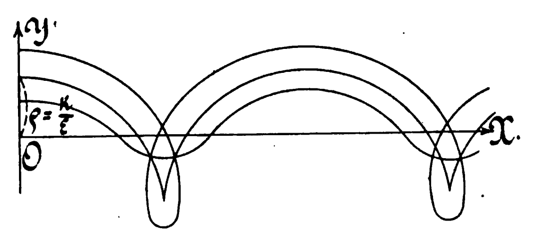
и уравненіе траекторіи подъ видомъ

$$y=\rho\, Cos\frac{x-\sqrt{\rho^2-y^2}}{\rho};$$

эта точка, слѣдовательно, будетъ описывать циклоиду.

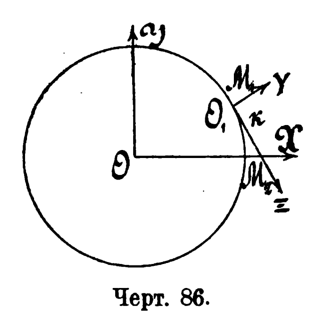
Траекторіи различныхъ точекъ фигуры, лежащихъ на оси, указаны на чертежѣ 85.

Примѣръ 29. Опредѣлить движеніе плоской фигуры, одна изъ точекъ которой M_1 движется равномѣрно по окружности круга радіуса ρ, а другая M_2, находящаяся на разстояніи k отъ первой, постоянно находится на оси OX.



Черт. 85.

Примемъ точку M_1 за полюсъ разсматриваемой нами фигуры и направимъ ось $O_1\Xi$ въ точку M_2 (черт. 86).



Черт. 86.

Въ такомъ случаѣ, имѣя въ виду, что относительныя координаты точки M_2 суть

$$\xi_2 = k \text{ и } \eta_2 = 0,$$

что она лежитъ на оси OX и что, слѣдовательно, для нея

$$y = 0$$

и принимая во вниманіе, что координаты полюса

$$x_0 = \rho \, Cos \, \varepsilon t$$
$$y_0 = \rho \, Sin \, \varepsilon t,$$

если ε есть уголъ, отвѣчающій дугѣ, проходимой точкой M_1 по окружности радіуса ρ въ единицу времени, на основаніи второй изъ формулъ (97), мы будемъ имѣть, что

$$O = \rho \, Sin\, \varepsilon t + k \, Sin\, \psi,$$

откуда получимъ, что

$$Sin\, \psi = -\frac{\rho}{k}\, Sin\, \varepsilon t,$$

а такъ какъ въ такомъ случаѣ

$$Cos\, \psi = \frac{\sqrt{k^2 - \rho^2 Sin^2\, \varepsilon t}}{k},$$

то абсолютныя координаты перемѣнной точки разсматриваемой нами фигуры выразятся равенствами

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\, Cos\, \varepsilon t + \xi \frac{\sqrt{k^2 - \rho^2 Sin^2\, \varepsilon t}}{k} + \eta \frac{\rho}{k}\, Sin\, \varepsilon t \\ y &= \rho\, Sin\, \varepsilon t - \xi \frac{\rho}{k}\, Sin\, \varepsilon t + \eta \frac{\sqrt{k^2 - \rho^2 Sin^2\, \varepsilon t}}{k} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (99)$$

Помножная первое изъ полученныхъ равенствъ на η, а второе на ξ и вычитая изъ перваго изъ нихъ второе, мы получимъ

$$x\eta - y\xi = \rho\eta\, Cos\, \varepsilon t + \rho \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{k} - \xi\right) Sin\, \varepsilon t; \quad . \; . \; (100)$$

съ другой стороны, представивъ полученныя уравненія подъ видомъ

$$x - \rho\, Cos\, \varepsilon t = \xi \frac{\sqrt{k^2 - \rho^2 Sin^2\, \varepsilon t}}{k} + \eta \frac{\rho}{k}\, Sin\, \varepsilon t$$

$$y - \rho\, Sin\, \varepsilon t = -\xi \frac{\rho}{k}\, Sin\, \varepsilon t + \eta \frac{\sqrt{k^2 - \rho^2 Sin^2\, \varepsilon t}}{k},$$

а затѣмъ, возвышая ихъ въ квадратъ и складывая между собой, найдемъ

$$(x - \rho\, Cos\, \varepsilon t)^2 + (y - \rho\, Sin\, \varepsilon t)^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

откуда будемъ имѣть

$$\frac{x^2+y^2+\rho^2-\xi^2-\eta^2}{2}=\rho\, x\, Cos\, \varepsilon t+\rho y\, Sin\, \varepsilon t \quad . \quad . \quad (101)$$

Рѣшая, наконецъ, уравненія (100) и (101) относительно

$Sin\, \varepsilon t$ и $Cos\, \varepsilon t$

и подставляя найденныя значенія въ тождество

$$Sin^2\, \varepsilon t+Cos^2\, \varepsilon t=1,$$

найдемъ общее уравненіе траекторій точекъ разсматриваемой нами плоской фигуры.

Въ частности, для точекъ, лежащихъ на оси $O_1\Xi$,

$$\eta=0,$$

а потому уравненія (99) примутъ видъ

$$\left.\begin{aligned} x&=\rho\, Cos\, \varepsilon t+\xi\frac{\sqrt{k^2-\rho^2 Sin^2\, \varepsilon t}}{k}\\ y&=\rho\, Sin\, \varepsilon t-\xi\frac{\rho}{k}\, Sin\, \varepsilon t \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (102)$$

Второе изъ этихъ уравненій дастъ, что

$$Sin\, \varepsilon t=\frac{yk}{\rho k-\rho\xi}$$

и, слѣдовательно, что

$$Cos\, \varepsilon t=\sqrt{1-\frac{k^2y^2}{\rho^2(k-\xi)^2}},$$

а подставляя найденныя значенія для

$Sin\, \varepsilon t$ и $Cos\, \varepsilon t$

въ первое изъ уравненій (102), мы получимъ общее уравненіе траекторій точекъ разсматриваемой фигуры, лежащихъ на оси $O_1\Xi$, подъ видомъ

$$x=\rho\sqrt{1-\frac{k^2y^2}{\rho^2(k-\xi)^2}}+\xi\sqrt{1-\frac{y^2}{(k-\xi)^2}}$$

79. Обращаясь къ разсмотрѣнію скоростей точекъ, движущихся въ плоскости, на основаніи формулъ (46) главы V, мы видимъ, что проекціи на оси системы

$$\Xi O_1 \Upsilon$$

скорости абсолютнаго движенія точки будутъ:

$$\left.\begin{aligned} v_a \, Cos\,(v_a\,,\Xi) &= \frac{d\xi}{dt} + x_0{}' \, Cos\,\psi + y_0{}' \, Sin\,\psi - r\eta \\ v_a \, Cos\,(v_a\,,\Upsilon) &= \frac{d\eta}{dt} - x_0{}' \, Sin\,\psi + y_0{}' \, Cos\,\psi + r\xi \end{aligned}\right\} ; \quad (103)$$

величина скорости абсолютнаго движенія опредѣлится, слѣдовательно, формулой

$$v_a = \\ = \sqrt{(\xi' + x_0{}' \, Cos\,\psi + y_0{}' \, Sin\,\psi - r\eta)^2 + (\eta' - x_0{}' \, Sin\,\psi + y_0{}' \, Cos\,\psi + r\xi)^2},$$

гдѣ передъ корнемъ надо брать знакъ плюсъ, а ея направленіе косинусами угловъ, образуемыхъ ею съ осями системы

$$\Xi O_1 \Upsilon,$$

на основаніи формулъ (103).

Проекціи на оси той же системы скорости относительнаго движенія точки будутъ:

$$\left.\begin{aligned} v_r \, Cos\,(v_r\,,\Xi) &= \frac{d\xi}{dt} \\ v_r \, Cos\,(v_r\,,\Upsilon) &= \frac{d\eta}{dt} \end{aligned}\right\} ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

слѣдовательно, величина этой скорости опредѣлится формулой

$$v_r = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2},$$

гдѣ передъ корнемъ надо брать знакъ плюсъ, а ея направленіе косинусами угловъ, образуемыхъ ею съ осями подвижной координатной системы, на основаніи формулъ (104).

Наконецъ, проекціи на оси системы

$$\Xi\, O_1\, \Upsilon$$

переносной скорости точки, на основаніи формулъ (48) главы V, будутъ:

$$\left.\begin{aligned} v_e \, Cos\,(v_e, \Xi) &= \quad x_0' \, Cos\,\psi + y_0' \, Sin\,\psi - r\eta \\ v_e \, Cos\,(v_e, \Upsilon) &= - x_0' \, Sin\,\psi + y_0' \, Cos\,\psi + r\xi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (105)$$

и, слѣдовательно, величина этой скорости будетъ

$$v_e = \\ = \sqrt{(x_0' \, Cos\,\psi + y_0' \, Sin\,\psi - r\eta)^2 + (- x_0' \, Sin\,\psi + y_0' \, Cos\,\psi + r\xi)^2}\,,$$

гдѣ передъ корнемъ слѣдуетъ брать знакъ плюсъ, а ея направленіе опредѣлится такъ же, какъ и направленіе абсолютной и относительной скоростей, т. е., на основаніи формулъ (105), косинусами угловъ, образуемыхъ ею съ осями системы

$$\Xi\, O_1\, \Upsilon.$$

Очевидно, что для точки, движущейся въ плоскости, имѣетъ мѣсто общая теорема, заключающаяся въ томъ, что скорость абсолютнаго движенія точки есть геометрическая сумма скоростей относительнаго и переноснаго движеній и выражаемая равенствомъ

$$\overline{v_a} = \overline{v_r} + \overline{v_e}\,.$$

Формулы (105) представляютъ проекціи на оси системы

$$\Xi\, O_1\, \Upsilon$$

скорости точки плоской фигуры, движущейся въ ея плоскости, при чемъ проекціи на эти оси поступательной скорости полюса будутъ:

$$\left.\begin{aligned} v_p \, Cos\,(v_p \Xi) &= \quad x_0' \, Cos\,\psi + y_0' \, Sin\,\psi \\ v_p \, Cos\,(v_p \Upsilon) &= - x_0' \, Sin\,\psi + y_0' \, Cos\,\psi \end{aligned}\right\},$$

а проекціи на тѣ же оси вращательной скорости какой-нибудь точки фигуры около этого полюса выразятся равенствами

$$w \, Cos\,(w, \Xi) = - r\eta$$
$$w \, Cos\,(w, \Upsilon) = \quad r\xi$$

или

$$w \, Cos\,(w, \Xi) = - \eta\psi'$$
$$w \, Cos\,(w, \Upsilon) = \quad \xi\psi',$$

такъ какъ, въ разсматриваемомъ случаѣ, т. е. при движеніи плоской фигуры, мгновенныя оси все время остаются перпендикулярными къ ея плоскости и, слѣдовательно,

$$p = q = 0$$

и угловая скорость

$$\omega = r = \frac{d\psi}{dt}$$

Такимъ образомъ, мы будемъ имѣть, во-первыхъ, что проекціи скорости точки плоской фигуры на оси, неизмѣнно связанной съ ней, координатной системы выразятся формулами,

$$\left.\begin{aligned} v \, Cos\,(v,\Xi) &= x_0' \, Cos\,\psi + y_0' \, Sin\,\psi - \eta\psi' \\ v \, Cos\,(v,\Upsilon) &= - x_0' \, Sin\,\psi + y_0' \, Cos\,\psi + \xi\psi' \end{aligned}\right\}. \qquad (106)$$

а во-вторыхъ,—что и для точекъ плоской фигуры

$$v = \overline{v_p} + w,$$

что, впрочемъ, очевидно, такъ какъ послѣднее равенство выражаетъ общую теорему, доказанную въ n^0 58 главы V.

80. **Теорема**. *При движеніи плоской фигуры въ ея плоскости, въ каждый моментъ времени, имѣется точка, скорость которой равняется нулю.*

Въ самомъ дѣлѣ, полагая, что

$$v = 0,$$

мы получимъ, что

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \frac{x_0' \, Sin\,\psi - y_0' \, Cos\,\psi}{\psi'} \\ \eta &= \frac{x_0' \, Cos\,\psi + y_0' \, Sin\,\psi}{\psi'}\end{aligned}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

т. е., для каждаго момента времени, найдемъ точку плоской фигуры, скорость которой равняется нулю, что и доказываетъ предложенную теорему.

Точку плоской фигуры, скорость которой, въ данный моментъ времени, равняется нулю, мы будемъ называть **мгновеннымъ центромъ** разсматриваемой фигуры въ этотъ моментъ времени.

Изъ изложеннаго слѣдутъ, что, въ каждый моментъ времени, всѣ точки плоской фигуры стремятся двигаться по окружностямъ, центры которыхъ находятся въ мгновенномъ центрѣ, отвѣчающемъ данному моменту.

Замѣтимъ, что, если

$$\psi' = 0,$$

то

$$\xi = \infty \text{ и } \eta = \infty,$$

т. е. если фигура движется поступательно, то ея мгновенный центръ находится въ безконечности.

81. Геометрическое мѣсто мгновенныхъ центровъ плоской фигуры на неподвижной плоскости мы будемъ называть **неподвижной центроидой** данной фигуры, а геометрическое мѣсто мгновенныхъ центровъ на самой движущейся фигурѣ ея **подвижной центроидой**.

Чтобы получить уравненіе подвижной центроиды, надо исключить t изъ уравненій (107), для того же, чтобы получить уравненіе неподвижной центроиды, надо въ эти уравненія подставить вмѣсто

$$\xi \text{ и } \eta$$

ихъ величины, опредѣляемыя уравненіями (97), т. е.

$$\xi = (x - x_0)\, Cos\,\psi + (y - y_0)\, Sin\,\psi$$
$$\eta = -(x - x_0)\, Sin\,\psi + (y - y_0)\, Cos\,\psi$$

и исключить t изъ полученныхъ послѣ этого уравненій.

Замѣтимъ, что, такъ какъ мгновенный центръ плоской фигуры является точкой пересѣченія ея плоскости съ соотвѣтствующимъ положеніемъ мгновенной винтовой оси, которая перпендикулярна къ этой плоскости, то обѣ центроиды плоской фигуры представляютъ изъ себя линіи пересѣченія съ ея плоскостью аксоидовъ винтовыхъ осей (соотвѣтственно подвижнаго и неподвижнаго), являющихся въ разсматриваемомъ случаѣ цилиндрическими поверхностями, и мы можемъ, слѣдовательно, высказать слѣдующую теорему.

Теорема. *При движеніи плоской фигуры въ ея плоскости, ея подвижная центроида безъ скольженія катится по неподвижной.*

Примѣръ 30. Вывести уравненія подвижной и неподвижной центроиды плоской фигуры, неизмѣнно связанной съ однимъ изъ звеньевъ шарнирнаго антипараллелограма, поставленнаго на его противоположное звено.

Шарнирнымъ антипараллелограмомъ называется четырехсторонникъ, составленный изъ четырехъ стержней, соединенныхъ между собой шарнирами и расположенныхъ такъ, какъ показано на чертежѣ 87, при чемъ противоположныя стороны этого четырехсторонника попарно равны между собой, т. е.

$$M_1 M_2 = N_2 N_1$$

и

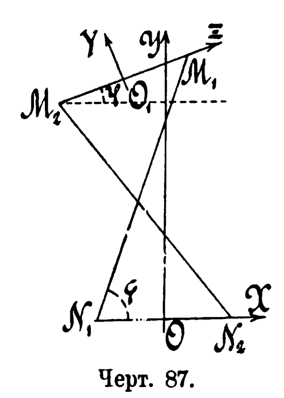
$$N_2 M_2 = N_1 M_1$$

Стороны четырехсторонника называются его звеньями; поставить четырехсторонникъ на какое-нибудь звено, значитъ укрѣпить это звено неподвижно.

Наша задача заключается въ томъ, чтобы найти уравне-

нія подвижной и неподвижной центроиды плоской фигуры, неизмѣнно связанной со звеномъ M_1M_2 антипараллелограма, въ предположеніи, что онъ поставленъ на звено N_1N_2.

Примемъ середину между точками N_1 и N_2 за начало неподвижной координатной системы и направимъ ось OX по



Черт. 87.

прямой N_1N_2; середину между точками M_1 и M_2 примемъ за начало подвижной координатной системы, а ось $O_1\Xi$ направимъ по прямой M_2M_1. Назовемъ уголъ между осями $O_1\Xi$ и OX черезъ

$$\psi,$$

уголъ, образуемый прямой N_1M_1 съ осью OX, черезъ

$$\varphi$$

и положимъ, что стороны четырехсторонника

$$N_1N_2 = M_2M_1 = 2l$$

и

$$N_1M_1 = N_2M_2 = 2l_1.$$

Въ такомъ случаѣ, называя абсолютныя координаты точекъ M_1 и M_2 соотвѣтственно черезъ

$$x_1, y_1 \text{ и } x_2, y_2,$$

мы будемъ имѣть

$$x_1 = 2l_1 \, Cos\, \varphi - l$$
$$y_1 = 2l_1 \, Sin\, \varphi$$

и

$$x_2 = x_1 - 2l\, Cos\,\psi = 2l_1\, Cos\,\varphi - l - 2l\, Cos\,\psi$$
$$y_2 = y_1 - 2l\, Sin\,\psi = 2l_1\, Sin\,\varphi - 2l\, Sin\,\psi,$$

такъ какъ

$$x_1 - x_2 = 2l\, Cos\,\psi$$
$$y_1 - y_2 = 2l\, Sin\,\psi.$$

Координаты полюса будутъ

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2l_1\, Cos\,\varphi - l\,(1 + Cos\,\psi)$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = 2l_1\, Sin\,\varphi - l\, Sin\,\psi.$$

Что касается угловъ

$$\psi \text{ и } \varphi,$$

то между ними существуетъ зависимость; въ самомъ дѣлѣ, имѣя въ виду, что точка M_2 движется по кругу радіуса $2l_1$ около точки N_2, мы видимъ, что

$$(x_2 - l)^2 + y_2^2 = 4l_1^2$$

и, слѣдовательно, что

$$4\,(l_1\, Cos\,\varphi - l - l\, Cos\,\psi)^2 + 4\,(l_1\, Sin\,\varphi - l\, Sin\,\psi)^2 = 4l_1^2,$$

откуда

$$l_1^2 + 2l^2 - 2ll_1\,(Cos\,\varphi\, Cos\,\psi + Sin\,\varphi\, Sin\,\psi) - 2ll_1\, Cos\,\varphi + 2l^2\, Cos\,\psi = l^2{}_1,$$

или

$$2l^2\,(1 + Cos\,\psi) - 2ll_1\,\{Cos\,\varphi + Cos\,(\varphi - \psi)\} = 0,$$

или же

$$2l^2\, Cos^2\frac{\psi}{2} = 2ll_1\, Cos\,\left(\varphi - \frac{\psi}{2}\right) Cos\,\frac{\psi}{2}$$

и слѣдовательно

$$l\, Cos\,\frac{\psi}{2} = l_1\, Cos\left(\varphi - \frac{\psi}{2}\right) = l_1\, Cos\,\varphi\, Cos\,\frac{\psi}{2} + l_1\, Sin\,\varphi\, Sin\,\frac{\psi}{2}.$$

Полученное равенство и дастъ намъ искомую зависимость подъ видомъ

$$tng\,\frac{\psi}{2} = \frac{l - l_1\, Cos\,\varphi}{l_1\, Sin\,\varphi} \quad \ldots\ldots \quad (108)$$

Принимая во вниманіе, что

$$x_0' = -2l_1 \, Sin\,\varphi\,\varphi' + l\, Sin\,\psi\,\psi'$$
$$y_0' = \quad 2l_1 \, Cos\,\varphi\,\varphi' - l\, Cos\,\psi\,\psi',$$

мы видимъ, что, на основаніи формулъ (105), проекціи на оси системы

$$\Xi\, O_1 \Upsilon$$

скорости какой-нибудь точки разсматриваемой нами фигуры будутъ

$$v\, Cos\,(v, \Xi) = -2l_1\, Sin\,\varphi\, Cos\,\psi\,\varphi' + l\, Sin\,\psi\, Cos\,\psi \cdot \psi' +$$
$$+ 2l_1\, Cos\,\varphi\, Sin\,\psi\,\varphi' - l\, Cos\,\psi\, Sin\,\psi\,\psi' - \eta\psi'$$
$$v\, Cos\,(v, \Upsilon) = 2l_1\, Sin\,\varphi\, Sin\,\psi\,\varphi' - l\, Sin^2\psi \cdot \psi' +$$
$$+ 2l_1\, Cos\,\varphi\, Cos\,\psi\,\varphi' - l\, Cos^2\psi \cdot \psi' + \xi\psi'$$

или

$$v\, Cos\,(v, \Xi) = -2l_1\, Sin\,(\varphi - \psi)\,\varphi' - \eta\psi'$$
$$v\, Cos\,(v, \Upsilon) = \quad 2l_1\, Cos\,(\varphi - \psi)\,\varphi' + (\xi - l)\,\psi'$$

Слѣдовательно, чтобы найти уравненіе подвижной центроиды, намъ надо исключить t, входящее черезъ посредство φ и ψ, изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} 2l_1\, Sin\,(\varphi - \psi)\,\varphi' + \eta\psi' = 0 \\ 2l_1\, Cos\,(\varphi - \psi)\,\varphi' + (\xi - l)\,\psi' = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (109)$$

и уравненія (108).

Приведя съ этой цѣлью уравненія (109) къ виду:

$$2l_1 \{Sin\,\varphi\, Cos\,\psi - Cos\,\varphi\, Sin\,\psi\}\,\varphi' + \eta\psi' = 0$$
$$2l_1 \{Cos\,\varphi\, Cos\,\psi + Sin\,\varphi\, Sin\,\psi\}\,\varphi' + (\xi - l)\,\psi' = 0$$

замѣнимъ въ нихъ

$$Cos\,\psi, \; Sin\,\psi$$

и

$$\psi',$$

ихъ выраженіями въ зависимости отъ

φ.

Принимая во вниманіе, что, на основаніи равенства (108),

$$\psi = 2arctng\,\frac{l - l_1\,Cos\,\varphi}{l_1\,Sin\,\varphi}$$

и, слѣдовательно,

$$\psi' = 2\,\frac{l_1^2\,Sin^2\,\varphi - l_1\,Cos\,\varphi\,(l - l_1\,Cos\,\varphi)}{l_1^2\,Sin^2\,\varphi\left\{1 + \left(\frac{l - l_1\,Cos\,\varphi}{l_1\,Sin\,\varphi}\right)^2\right\}}\,\varphi' \;.$$

или

$$\psi' = 2\,\frac{l_1^2 - ll_1\,Cos\,\varphi}{l_1^2 + l^2 - 2ll_1 Cos\,\varphi}\,\varphi' = 2l_1\,\frac{l_1 - l\,Cos\,\varphi}{l_1^2 + l^2 - 2ll_1\,Cos\,\varphi}\,\varphi' \quad . \,(110)$$

и что

$$Sin\,\psi = \frac{2\,tng\,\frac{\psi}{2}}{1 + tng^2\,\frac{\psi}{2}} = \frac{2\,\frac{l - l_1\,Cos\,\varphi}{l_1\,Sin\,\varphi}}{1 + \left(\frac{l - l_1\,Cos\,\varphi}{l_1\,Sin\,\varphi}\right)^2} = 2\,\frac{ll_1\,Sin\,\varphi - l_1^2\,Sin\,\varphi\,Cos\,\varphi}{l_1^2 + l^2 - 2ll_1\,Cos\,\varphi}$$

и

$$Cos\,\psi = \frac{1 - tng^2\,\frac{\psi}{2}}{1 + tng^2\,\frac{\psi}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{l - l_1\,Cos\,\varphi}{l_1\,Sin\,\varphi}\right)^2}{1 + \left(\frac{l - l_1\,Cos\,\varphi}{l_1\,Sin\,\varphi}\right)^2} = \frac{l_1^2(Sin^2\varphi - Cos^2\varphi) - l^2 + 2ll_1 Cos\varphi}{l_1^2 + l^2 - 2ll_1\,Cos\,\varphi},$$

мы будемъ имѣть

$$2l_1\,\frac{l_1^2(Sin^2\varphi - Cos^2\varphi)\,Sin\varphi - l^2 Sin\varphi + 2ll_1\,Cos\varphi\,Sin\varphi - 2ll_1\,Sin\varphi\,Cos\varphi + 2l_1^2\,Sin\varphi\,Cos^2\varphi}{l_1^2 + l^2 - 2ll_1\,Cos\varphi t}\,\varphi' +$$

$$+ 2l_1\,\eta\,\frac{l_1 - l\,Cos\varphi}{l_1^2 + l^2 - 2ll_1\,Cos\varphi}\,\varphi' = 0.$$

$$2l_1\,\frac{l_1^2\,(Sin^2\varphi - Cos^2\varphi)\,Cos\varphi - l^2\,Cos\,\varphi + 2ll_1\,Cos^2\varphi + 2ll_1\,Sin^2\varphi - 2l_1^2\,Sin^2\varphi\,Cos\varphi}{l_1^2 + l^2 - 2ll_1\,Cos\,\varphi t}\,\varphi' +$$

$$+ 2l_1\,(\xi - l)\,\frac{l_1 - l\,Cos\varphi}{l_1^2 + l^2 - 2ll_1\,Cos\varphi}\,\varphi' = 0,$$

откуда получимъ

$$Sin\varphi\,(l_1^2 - l^2) + \eta\,(l_1 - l\,Cos\varphi) = 0$$

$$2ll_1 - Cos\varphi\,(l^2 + l_1^2) + (\xi - l)\,(l_1 - l\,Cos\varphi) = 0$$

или

$$Sin\varphi\,(l^2 - l_1^{\,2}) + \eta l\, Cos\varphi = \eta l_1$$
$$Cos\varphi\,(l_1^{\,2} + l\xi) = l l_1 + l_1\xi,$$

а изъ этихъ уравненій найдемъ, что

$$Cos\varphi = \frac{ll_1 + l_1\xi}{l_1^2 + l\xi}$$

$$Sin\varphi = -\frac{\eta l_1}{l_1^2 + l\xi}$$

и, слѣдовательно, получимъ, что

$$l_1^{\,2}\left(\frac{l+\xi}{l_1^2 + l\xi}\right)^2 + \left(\frac{\eta l_1}{l_1^2 + l\xi}\right)^2 = 1,$$

откуда

$$l_1^{\,2} l^2 + 2l_1^{\,2} l\xi + l_1^{\,2}\xi^2 + \eta^2 l_1^{\,2} = l_1^{\,4} + 2l_1^{\,2} l\xi + l^2\xi^2$$

или

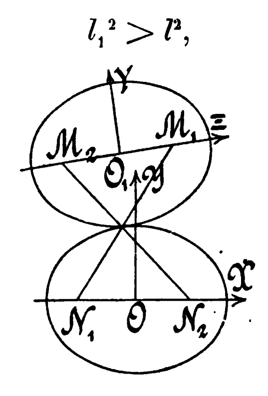
$$\xi^2 (l_1^{\,2} - l^2) + \eta^2 l_1^{\,2} = l_1^{\,2}(l_1^{\,2} - l^2)$$

и такимъ образомъ найдемъ уравненіе подвижной центроиды подъ видомъ

$$\frac{\xi^2}{l_1^{\,2}} + \frac{\eta^2}{l_1^2 - l^2} = 1.$$

Разсматривая это уравненіе, мы видимъ, что подвижная центроида является эллипсомъ, если

$$l_1^{\,2} > l^2,$$



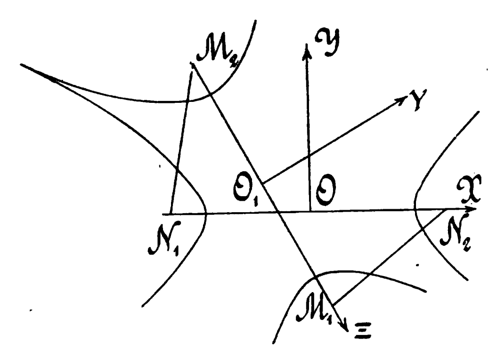
Черт. 88.

т. е. если антипараллелограмъ поставленъ на короткое звено (черт. 88), и гиперболой, если

$$l_1^2 < l^2,$$

т. е. если антипараллелограмъ поставленъ на длинное звено (черт. 89).

Что касается неподвижной центроиды, то, такъ какъ шарнирный антипараллелограмъ представляетъ изъ себя



Черт. 89.

симметричную фигуру, относительно его противоположныхъ звеньевъ, то она будетъ тождественна съ подвижной, а потому ея уравненіе относительно системы координатныхъ осей

$$XOY$$

будетъ

$$\frac{x^2}{l^2{}_1} + \frac{y^2}{l_1^2 - l^2} = 1.$$

82. Переходя къ разсмотрѣнію ускореній точекъ, движущихся въ плоскости, на основаніи формулъ (88) главы VII и принимая во вниманіе, что въ разсматриваемомъ случаѣ

$$p = q = 0$$

и что

$$r = \omega = \psi',$$

мы получимъ проекціи на оси координатной системы

$$\Xi O_1 \Upsilon$$

ускоренія абсолютнаго движенія какой-нибудь точки подъ видомъ

$$\left.\begin{array}{c} a\,Cos\,(a,\Xi) = \xi'' + x''_0\,Cos\,\psi + \\ + y_0''\,Sin\,\psi - \psi''\eta - \xi\psi'^2 - 2\,\psi'\eta' \\ a\,Cos\,(a,\Upsilon) = \eta'' - x_0''\,Sin\,\psi + \\ + y_0''\,Cos\,\psi + \psi''\,\xi - \eta\,\psi'^2 + 2\psi'\xi \end{array}\right\}, \quad . \quad (111)$$

проекціи на тѣ же оси ускоренія относительнаго движенія этой точки будутъ:

$$\left.\begin{array}{l} a_r\,Cos\,(a_r\,,\,\Xi) = \xi'' \\ a_r\,Cos\,(a_r\,,\,\Upsilon) = \eta'' \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

проекціи ускоренія ея переноснаго движенія будутъ:

$$\left.\begin{array}{l} a_e\,Cos\,(a_e,\Xi) = \quad x_0''\,Cos\,\psi + y_0''\,Sin\,\psi - \psi''\,\eta - \xi\psi'^2 \\ a_e\,Cos(a_e,\Upsilon) = -x_0''\,Sin\,\psi + y_0''\,Cos\,\psi + \psi''\,\xi - \eta\psi'^2 \end{array}\right\}, (113)$$

наконецъ, проекціи на оси системы

$$\Xi O_1 \Upsilon$$

ускоренія Коріолиса той же точки будутъ:

$$\left.\begin{array}{l} a_c\,Cos\,(a_c,\,\Xi) = -2\psi'\eta' \\ a_c\,Cos\,(a_c,\,\Upsilon) = \quad 2\psi'\,\xi' \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

Величины и направленія ускореній абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній какой-нибудь точки и ея ускоренія Коріолиса опредѣлятся по формуламъ (111), (112), (113) и (114).

Формулы (113) представляютъ изъ себя проекціи на оси координатной системы

$$\Xi\, O_1\, \Upsilon$$

ускоренія какой-нибудь точки плоской фигуры, неизмѣнно

связанной съ этой системой, при чемъ проекціи на эти оси ускоренія ея полюса будутъ:

$$a_p\, Cos\,(a_p, \Xi) = \quad x_0''\, Cos\,\psi + y_0'\ \ Sin\,\psi$$
$$a_p\, Cos\,(a_p, \Upsilon) = - x_0''\, Sin\,\psi + y_0''\, Cos\,\psi,$$

проекціи на эти оси вращательнаго ускоренія какой-нибудь ея точки выразятся равенствами:

$$a_R\, Cos\,(a_R, \Xi) = -\psi''\eta$$
$$a_R\, Cos\,(a_R, \Upsilon) = \psi''\xi$$

или

$$a_R\, Cos\,(a_R, \Xi) = -\tau\eta$$
$$a_R\, Cos\,(a_R, \Upsilon) = \tau\xi,$$

ибо угловое ускореніе плоской фигуры

$$\tau = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\psi}{dt^2},$$

проекціи на оси системы

$$\Xi\, O_1 \Upsilon$$

осестремительнаго ускоренія какой-нибудь точки плоской фигуры будутъ:

$$a_J\, Cos\,(a_J\, \Xi) = -\xi\omega^2$$
$$a_J\, Cos\,(a_J\, \Upsilon) = -\eta\omega^2$$

Вращательное ускореніе какой-нибудь точки M плоской фигуры, какъ и въ общемъ случаѣ движенія, будетъ представлять ихъ себя моментъ, относительно данной точки, углового ускоренія плоской фигуры, построеннаго при ея полюсѣ, а осестремительное ускореніе этой точки будетъ равняться произведенію ея разстоянія до полюса на квадратъ угловой скорости плоской фигуры; такимъ образомъ, для нѣ-

которой точки M плоской фигуры, отстоящей отъ ея полюса на разстояніи

$$\rho,$$

мы будемъ имѣть

$$a_R = M_M(\tau) = \rho\tau = \rho\omega'$$
$$a_J = \rho\omega^2,$$

при чемъ

$$a_R \perp a_J,$$

ибо, при движеніи плоской фигуры,

$$\tau \parallel \omega$$

Координаты центра ускоренія опредѣлимъ, рѣшая совмѣстно уравненія

$$\xi\varphi'^2 + \eta\psi'' = x_0'' \, Cos\,\psi + y_0'' \, Sin\,\psi$$
$$\xi\psi'' - \eta\psi'^2 = x_0'' \, Sin\,\psi - y_0'' \, Cos\,\psi$$

Примѣръ 31. Опредѣлить вращательное и осестремительное ускореніе точки плоской фигуры, движущейся въ условіяхъ примѣра 30.

Мы имѣли, что

$$\psi' = 2l_1 \frac{l_1 - l\,Cos\,\varphi}{l^2_1 + l^2 - 2ll_1\,Cos\,\varphi}\,\varphi'$$

и, слѣдовательно, видимъ, что, въ разсматриваемомъ случаѣ движенія, угловая скорость плоской фигуры будетъ

$$\omega = 2l_1 \frac{l_1 - l\,Cos\,\varphi}{l^2_1 + l^2 - 2ll_1\,Cos\,\varphi}\,\varphi',$$

а ея угловое ускореніе будетъ

$$\tau = \omega' = 2l_1 \left\{ l \frac{(l^2 - l_1^2)\,Sin\,\varphi}{(l_1^2 + l^2 - 2ll_1\,Cos\,\varphi)^2}\,\varphi'^2 + \frac{l_1 - l\,Cos\,\varphi}{l_1^2 + l^2 - 2ll_1\,Cos\,\varphi}\,\varphi''\right\}.$$



Такимъ образомъ, мы будемъ имѣть, что вращательное ускореніе точки плоской фигуры, отстоящей отъ ея полюса на разстояніи ρ, будетъ

$$a_R = 2l_1\,\rho\left\{l\,\frac{(l^2-l_1^2)\,Sin\,\varphi}{(l_1^2+l^2-2ll_1\,Cos\,\varphi)^2}\,\varphi'^2 + \frac{l_1-l\,Cos\,\varphi}{l_1^2+l^2-2ll_1\,Cos\,\varphi}\,\varphi''\right\},$$

а ея осестремительное ускореніе будетъ

$$a_J = 4l^2{}_1\,\rho\,\frac{(l_1-l\,Cos\,\varphi)^2}{(l^2{}_1+l^2-2ll_1\,Cos\,\varphi)^2}.\,\varphi'^2$$

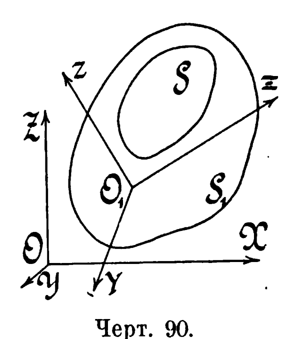
Глава IX.

Соединеніе движеній твердыхъ тѣлъ.

83. Положимъ, что мы имѣемъ нѣкоторое твердое тѣло S (черт. 90), которое движется относительно другого твердаго тѣла S_1, а это послѣднее, въ свою очередь, движется относительно координатной системы прямоугольныхъ осей

$$OXYZ,$$

которую мы будемъ считать неподвижной въ пространствѣ.



Черт. 90.

Движеніе твердаго тѣла S по отношенію къ координатной системѣ, принятой за неподвижную въ пространствѣ, будемъ называть **абсолютнымъ движеніемъ** этого тѣла и элементы этого движенія, какъ то: его угловую скорость, мгновенную винтовую ось, угловое ускореніе и т. д., будемъ называть соотвѣтственно абсолютной угловой скоростью, абсолютной

мгновенной винтовой осью, абсолютнымъ угловымъ ускореніемъ и т. д. и будемъ обозначать эти элементы соотвѣтствующими буквами съ указателями a внизу, напримѣръ абсолютную угловую скорость будемъ обозначать черезъ

$$\omega_a,$$

абсолютное угловое ускореніе черезъ

$$\tau_a$$

и т. д.

Движеніе твердаго тѣла S относительно тѣла S_1 будемъ называть **относительнымъ движеніемъ** тѣла S и угловую скорость, угловое ускореніе и другіе элементы этого движенія—относительной угловой скоростью, относительнымъ угловымъ ускореніемъ и т. д. и будемъ обозначать ихъ соотвѣтствующими буквами съ указателемъ r внизу, напримѣръ, угловую скорость относительнаго движенія тѣла S будемъ обозначать черезъ

$$\omega_r,$$

угловое ускореніе этого движенія черезъ

$$\tau_r,$$

и т. д.

Наконецъ, движеніе той части тѣла S_1, съ которой въ данный моментъ времени совпадаетъ тѣло S, будемъ называть **переноснымъ движеніемъ** послѣдняго, отвѣчающимъ этому моменту времени, и элементы этого движенія, какъ то: его угловую скорость, угловое ускореніе и т. д.,—переносной угловой скоростью, переноснымъ угловымъ ускореніемъ и т. д. и будемъ обозначать эти элементы соотвѣтствующими буквами съ указателемъ e, такъ что угловую скорость переноснаго движенія будемъ обозначать черезъ

$$\omega_e,$$

угловое ускореніе этого движенія черезъ

$$\tau_e$$

и т. д.

Очевидно, что элементы переноснаго движенія тѣла S соотвѣтственно равны элементамъ абсолютнаго движенія тѣла S_1 въ соотвѣтствующій моментъ времени, такъ что, если мы обозначимъ угловую скорость въ движеніи тѣла S_1 черезъ

$$\Omega,$$

а угловое ускореніе этого, движенія черезъ

$$T,$$

то мы будемъ имѣть, что

$$\omega_e = \Omega$$

$$\tau_e = T.$$

84. Зная относительное движеніе тѣла S по отношенію къ тѣлу S_1 и абсолютное движеніе послѣдняго или, что все равно, переносное движеніе тѣла S вмѣстѣ съ тѣломъ S_1, мы будемъ знать и абсолютное движеніе тѣла S.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что движеніе тѣла S_1 задано посредствомъ заданія въ функціяхъ отъ времени координатъ

$$x_{0_1},\ y_{0_1},\ z_{0_1}$$

какой-нибудь его точки O_1 (черт. 91), которую мы примемъ за его полюсъ, и какихъ-нибудь трехъ независимыхъ параметровъ, опредѣляющихъ косинусы угловъ, образуемыхъ съ осями

$$OXYZ$$

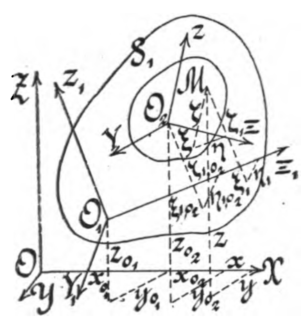
осями

$$O_1\,\Xi_1\,\Upsilon_1\,Z_1,$$

построенными при точкѣ O_1 и неизмѣнно связанными съ

разсматриваемымъ тѣломъ S_1; обозначимъ эти косинусы, какъ указано въ нижеприведенной таблицѣ:

	Ξ_1	Υ_1	Z_1
X	a_{11},	b_{11},	c_{11}
Y	a_{12},	b_{12},	c_{12}
Z	a_{13},	b_{13},	c_{13}



Черт. 91.

Въ такомъ случаѣ, обозначая координаты какой-нибудь точки M относительно системы

$$OXYZ$$

черезъ

$$x,\ y,\ z,$$

а ея координаты относительно системы

$$O_1\,\Xi_1\,\Upsilon_1\,Z_1$$

черезъ

$$\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,$$

мы будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} x &= x_{01} + \xi_1 a_{11} + \eta_1 b_{11} + \zeta_1 c_{11} \\ y &= y_{01} + \xi_1 a_{12} + \eta_1 b_{12} + \zeta_1 c_{12} \\ z &= z_{01} + \xi_1 a_{13} + \eta_1 b_{13} + \zeta_1 c_{13} \end{aligned}\right\} \ . \ . \ . \quad (115)$$

т. е. получимъ формулы, по которымъ будемъ въ состояніи опредѣлить въ функціяхъ отъ времени координаты любой точки тѣла S_1 въ его абсолютномъ движеніи.

Положимъ затѣмъ, что относительное движеніе тѣла S по отношенію къ тѣлу S_1 задано посредствомъ заданія въ функціяхъ отъ времени координатъ

$$\xi_{10_2},\ \eta_{10_2},\ \zeta_{10_2},$$

относительно системы

$$O_1\,\Xi_1\,\Upsilon_1\,Z_1,$$

какой-нибудь его точки O_2, которую мы примемъ за полюсъ тѣла S_1, и какихъ-нибудь трехъ независимыхъ параметровъ, опредѣляющихъ косинусы угловъ, образуемыхъ съ осями этой системы, осями системы

$$O_2\,\Xi\,\Upsilon\,Z,$$

построенной при точкѣ O_2 и неизмѣнно связанной съ тѣломъ S; обозначимъ эти косинусы, какъ указано въ нижеприведенной таблицѣ:

	Ξ	Υ	Z
Ξ_1	a_1,	b_1,	c_1
Υ_1	a_2,	b_2,	c_2
Z_1	a_3,	b_3,	c_3

Называя въ такомъ случаѣ координаты какой-нибудь точки M, относительно системы

$$O_1\,\Xi_1\,\Upsilon_1\,Z_1,$$

по предыдущему, черезъ

$$\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,$$

а координаты этой точки относительно системы

$$O_2 \Xi \Upsilon Z$$

черезъ

$$\xi, \eta, \zeta,$$

мы будемъ имѣть

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_{10_2} + \xi a_1 + \eta b_1 + \zeta c_1 \\ \eta_1 &= \eta_{10_2} + \xi a_2 + \eta b_2 + \zeta c_2 \\ \zeta_1 &= \zeta_{10_2} + \xi a_3 + \eta b_3 + \zeta c_3 \end{aligned}$$

т. е. получимъ формулы, по которымъ будемъ въ состояніи опредѣлить въ функціяхъ отъ времени координаты любой точки тѣла S въ его относительномъ движеніи, по отношенію къ координатной системѣ

$$O_1 \Xi_1 \Upsilon_1 Z_1,$$

т. е. по отношенію къ тѣлу S_1.

Обращаясь теперь къ зависимости между координатами точки M относительно системы

$$O X Y Z$$

и относительно системы

$$O_2 \Xi \Upsilon Z$$

мы можемъ написать, что

$$\left.\begin{aligned} x &= x_{0_2} + \xi \, Cos\,(\Xi, X) + \eta Cos\,(\Upsilon, X) + \zeta \, Cos\,(Z, X) \\ y &= y_{0_2} + \xi \, Cos\,(\Xi, Y) + \eta Cos\,(\Upsilon, Y) + \zeta \, Cos\,(Z, Y) \\ z &= z_{0_2} + \xi \, Cos\,(\Xi, Z) + \eta Cos\,(\Upsilon, Z) + \zeta \, Cos\,(Z, Z) \end{aligned}\right\} . \quad (116)$$

т. е. получимъ формулы, по которымъ найдемъ въ функціяхъ отъ времени координаты любой точки тѣла S въ его абсолютномъ движеніи, если задано относительное движеніе этого тѣла, по отношенію къ тѣлу S_1, и абсолютное движеніе послѣдняго, ибо въ такомъ случаѣ мы будемъ имѣть координаты

$$x_{0_2}, \; y_{0_2}, \; z_{0_2}$$

въ функціяхъ отъ времени, на основаніи формулъ (115), подъ видомъ

$$x_{0_2} = x_{0_1} + \xi_{10_2} a_{11} + \eta_{10_2} b_{11} + \zeta_{10_2} c_{11}$$
$$y_{0_2} = y_{0_1} + \xi_{10_2} a_{12} + \eta_{10_2} b_{12} + \zeta_{10_2} c_{12}$$
$$z_{0_2} = z_{0_1} + \xi_{10_2} a_{13} + \eta_{10_2} b_{13} + \zeta_{10_2} c_{13}$$

и девять косинусовъ, входящихъ въ составъ формулъ (116), подъ видомъ

$$Cos\,(\Xi X) = a_1 a_{11} + a_2 b_{11} + a_3 c_{11}$$
$$Cos\,(\Upsilon X) = b_1 a_{11} + b_2 b_{11} + b_3 c_{11}$$
$$Cos\,(Z X) = c_1 a_{11} + c_2 b_{11} + c_3 c_{11}$$
$$Cos\,(\Xi Y) = a_1 a_{12} + a_2 b_{12} + a_3 c_{12}$$
$$Cos\,(\Upsilon Y) = b_1 a_{12} + b_2 b_{12} + b_3 c_{12}$$
$$Cos\,(Z Y) = c_1 a_{12} + c_2 b_{12} + c_3 c_{12}$$
$$Cos\,(\Xi Z) = a_1 a_{13} + a_2 b_{13} + a_3 c_{13}$$
$$Cos\,(\Upsilon Z) = b_1 a_{13} + b_2 b_{13} + b_3 c_{13}$$
$$Cos\,(Z Z) = c_1 a_{13} + c_2 b_{13} + c_3 c_{13}$$

Примѣръ 32. Торъ S (черт. 92) равномѣрно вращается около своей оси, а эта послѣдняя неизмѣнно связана съ твердымъ тѣломъ, вращающимся около одной изъ точекъ этой оси, причемъ вращеніе твердаго тѣла задано, посредствомъ заданія Эйлеровыхъ угловъ, равенствами

$$\varphi = \varepsilon t$$
$$\psi = \varepsilon_1 t$$
$$\theta = \delta,$$

при условіи, что ось тора принята за ось

$$O_1 Z_1$$

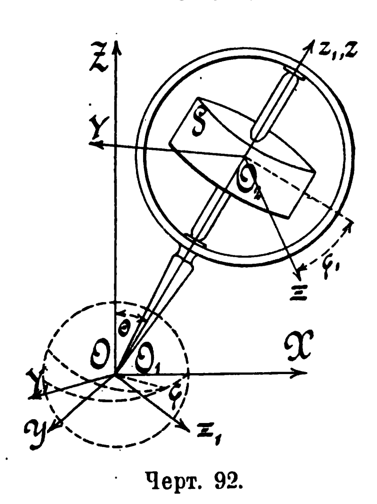
координатной системы, неизмѣнно связанной съ твердымъ тѣломъ.

Принявъ неподвижную точку оси тора за общее начало координатныхъ системъ

$$OXYZ,$$

неподвижной въ пространствѣ, и

$$O\Xi_1 \Upsilon_1 Z_1,$$



Черт. 92.

неизмѣнно связанной съ твердымъ тѣломъ, относительно котораго вращается торъ, примемъ, согласно условіямъ разсматриваемаго примѣра, ось вращенія тора за ось

$$O_1Z_1.$$

Полюсъ O_2 тора возьмемъ въ его центрѣ, а неизмѣнно связанную съ нимъ координатную систему

$$O_2 \Xi \Upsilon Z$$

расположимъ такъ, чтобы ось $O_2 Z$ совпадала съ осью $O_1 Z_1$ и чтобы ось $O_2 \Xi$ въ начальномъ положеніи тора лежала въ плоскости

$$Z_1 O_1 \Xi_1.$$

Въ такомъ случаѣ, называя разстояніе центра тора отъ

неподвижной точки его оси черезъ k, а уголъ, на который торъ поворачивается въ единицу времени, при равномѣрномъ вращеніи около его оси, черезъ γ, мы видимъ, что координаты полюса O_2 тора относительно координатной системы

$$O_1 \Xi_1 \Upsilon_1 Z_1$$

будутъ

$$\xi_{1o_2} = \eta_{1o_2} = 0 \text{ и } \zeta_{1o_2} = k$$

и Эйлеровы углы, опредѣляющіе относительное движеніе тора, т. е. опредѣляющіе положенія осей системы

$$O_2 \Xi \Upsilon Z$$

по отношенію къ осямъ системы

$$O_1 \Xi_1 \Upsilon_1 Z_1,$$

будутъ

$$\varphi_1 = 0, \quad \psi_1 = \gamma t, \quad \theta_1 = 0.$$

Въ такомъ случаѣ, мы будемъ имѣть, что

$$a_{11} = Cos\,\varepsilon t\; Cos\,\varepsilon_1 t - Sin\,\varepsilon t\; Sin\,\varepsilon_1 t\; Cos\,\delta$$
$$b_{11} = -Cos\,\varepsilon t\; Sin\,\varepsilon_1 t - Sin\,\varepsilon t\; Cos\,\varepsilon_1 t\; Cos\,\delta$$
$$c_{11} = Sin\,\varepsilon t\; Sin\,\delta$$
$$a_{12} = Sin\,\varepsilon t\; Cos\,\varepsilon_1 t + Cos\,\varepsilon t\; Sin\,\varepsilon_1 t\; Cos\,\delta$$
$$b_{12} = -Sin\,\varepsilon t\; Sin\,\varepsilon_1 t + Cos\,\varepsilon t\; Cos\,\varepsilon_1 t\; Cos\,\delta$$
$$c_{12} = -Cos\,\varepsilon t\; Sin\,\delta$$
$$a_{13} = Sin\,\varepsilon_1 t\; Sin\,\delta$$
$$b_{13} = Cos\,\varepsilon_1 t\; Sin\,\delta$$
$$c_{13} = Cos\,\delta$$

и что

$$a_1 = Cos\,\gamma t \qquad b_1 = Sin\,\gamma t \qquad c_1 = 0$$
$$a_2 = -Sin\,\gamma t \qquad b_2 = Cos\,\gamma t \qquad c_2 = 0$$
$$a_3 = 0 \qquad b_3 = 0 \qquad c_3 = 1$$

и, слѣдовательно, найдемъ абсолютныя координаты полюса O_2 разсматриваемаго тора подъ видомъ

$$x_{0_2} = k\, Sin\, \varepsilon t\, Sin\, \delta$$
$$y_{0_2} = -k\, Cos\, \varepsilon t\, Sin\, \delta$$
$$z_{0_2} = k\, Cos\, \delta,$$

а косинусы угловъ между осями системы

$$O_2\, \Xi \Upsilon Z$$

и осями системы

$$OXYZ$$

подъ видомъ

$$Cos\,(\Xi, X) = Cos\, \varepsilon t\, Cos\,(\varepsilon_1 t - \gamma t) - Sin\, \varepsilon t\, Sin\,(\varepsilon_1 t - \gamma t)\, Cos\, \delta$$
$$Cos\,(\Upsilon, X) = -Cos\, \varepsilon t\, Sin\,(\varepsilon_1 t - \gamma t) - Sin\, \varepsilon t\, Cos\,(\varepsilon_1 t - \gamma t)\, Cos\, \delta$$
$$Cos\,(Z, X) = Sin\, \varepsilon t\, Sin\, \delta$$
$$Cos\,(\Xi, Y) = Sin\, \varepsilon t\, Cos\,(\varepsilon_1 t - \gamma t) + Cos\, \varepsilon t\, Sin\,(\varepsilon_1 t - \gamma t)\, Cos\, \delta$$
$$Cos\,(\Upsilon, Y) = -Sin\, \varepsilon t\, Sin(\varepsilon_1 t - \gamma t) + Cos\, \varepsilon t\, Cos(\varepsilon_1 t - \gamma t)\, Cos\, \delta$$
$$Cos(Z, Y) = -Cos\, \varepsilon t\, Sin\, \delta$$
$$Cos\,(\Xi, Z) = Sin\,(\varepsilon_1 t - \gamma t)\, Sin\, \delta$$
$$Cos\,(\Upsilon, Z) = Cos\,(\varepsilon_1 t - \gamma t)\, Sin\, \delta$$
$$Cos\,(Z, Z) = Cos\, \delta$$

Имѣя полученные результаты, найдемъ абсолютные координаты любой точки тора, по формуламъ

$$x = x_{0_2} + \xi\, Cos\,(\Xi, X) + \eta\, Cos\,(\Upsilon, X) + \zeta\, Cos\,(Z, X)$$
$$y = y_{0_2} + \xi\, Cos\,(\Xi, Y) + \eta\, Cos\,(\Upsilon, Y) + \zeta\, Cos\,(Z, Y)$$
$$z = z_{0_2} + \xi\, Cos\,(\Xi, Z) + \eta\, Cos\,(\Upsilon, Z) + \zeta\, Cos\,(Z, Z)$$

Напримѣръ, для точки боковой поверхности тора, лежащей на оси $O_2\,\Xi$, т. е. имѣющей координаты

$$\xi = \rho\,, \qquad \eta = \zeta = 0\,,$$

если

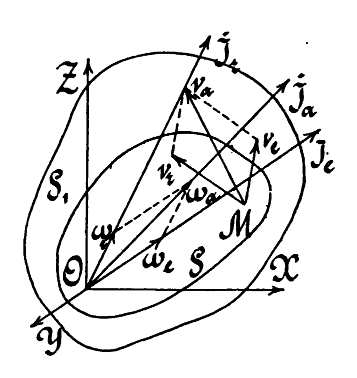
$$\rho$$

есть радіусъ тора, будемъ имѣть

$$x = k\, Sin\,\varepsilon t\, Sin\,\delta + \rho \{Cos\,\varepsilon t\, Cos(\varepsilon_1 t - \gamma t) - Sin\,\varepsilon t\, Sin(\varepsilon_1 t - \gamma t)\, Cos\,\delta\}$$
$$y = k\, Cos\,\varepsilon t\, Sin\,\delta + \rho \{Sin\,\varepsilon t\, Cos(\varepsilon_1 t - \gamma t) + Cos\,\varepsilon t\, Sin(\varepsilon_1 t - \gamma t)\, Cos\,\delta\} .$$
$$z = k\, Cos\,\delta + \rho\, Sin\,(\varepsilon_1 t - \gamma t)\, Sin\,\delta$$

85. **Теорема.** *Угловая скорость абсолютнаго движенія твердаго тѣла есть геометрическая сумма угловыхъ скоростей его относительнаго и переноснаго движеній.*

Имѣя въ виду, что величина и направленіе угловой скорости не зависятъ отъ выбора полюса, мы можемъ, не нарушая общности разсматриваемой нами теоремы, принять, что какъ полюсъ твердаго тѣла S_1, такъ и полюсъ твердаго тѣла S, оба лежатъ въ началѣ неподвижной координатной системы (черт. 93). Взявъ какую-нибудь точку M твердаго



Черт. 93.

тѣла S, мы видимъ, что она совершаетъ относительное движеніе по отношенію къ тѣлу S_1, совершаетъ переносное движеніе вмѣстѣ съ той точкой тѣла S_1, съ которой она совпадаетъ въ данный моментъ времени, и, наконецъ, совершаетъ

абсолютное движеніе, по отношенію къ неподвижной координатной системѣ

$$OXYZ,$$

въ пространствѣ.

Называя скорости абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній точки M соотвѣтственно черезъ

$$v_a, \; v_r \text{ и } v_e.$$

мы будемъ имѣть

$$\overline{v_a} = \overline{v_r} + \overline{v_e}.$$

Но такъ какъ, при всѣхъ трехъ движеніяхъ точки M, въ тѣлахъ, въ которыхъ эти движенія происходятъ, имѣется неподвижная точка, то, называя угловыя скорости абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній тѣла S соотвѣтственно черезъ

$$\omega_a, \; \omega_r \text{ и } \omega_e$$

мы будемъ имѣть

$$v_a = M_M(\omega_a)_0$$

$$v_r = M_M(\omega_r)_0$$

$$v_e = M_M(\omega_e)_0$$

и, слѣдовательно, получимъ, что

$$\overline{M_M(\omega_a)_0} = \overline{M_M(\omega_r)_0} + \overline{M_M(\omega_e)_0},$$

откуда будемъ имѣть, что

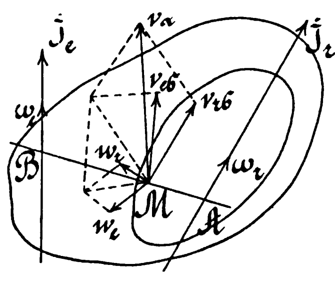
$$\overline{\omega_a} = \overline{\omega_r} + \overline{\omega_e},$$

что и доказываетъ предложенную теорему.

86. Покажемъ, какимъ образомъ можно найти положеніе мгновенной винтовой оси абсолютнаго движенія твердаго тѣла, когда извѣстны положенія мгновенныхъ винтовыхъ осей его

относительнаго и переноснаго движеній и угловыя скорости этихъ движеній.

Положимъ, что прямая J_r (черт. 94) представляетъ мгновенную винтовую ось относительнаго движенія нѣкотораго твердаго тѣла S, а прямая J_e мгновенную винтовую ось переноснаго движенія этого тѣла или, что все равно, мгновенную винтовую ось движенія того тѣла S_1, по отношенію къ которому мы разсматриваемъ относительное движеніе тѣла S.



Черт. 94.

Построимъ прямую AB, по которой измѣряется кратчайшее разстояніе между разсматриваемыми осями и разсмотримъ абсолютную скорость

$$v_a$$

какой-нибудь точки M тѣла S, лежащей на этой прямой. Называя относительную и переносную скорости этой точки соотвѣтственно черезъ

$$v_r \text{ и } v_e,$$

мы будемъ имѣть

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e$$

Имѣя затѣмъ въ виду, что вообще скорость точки твердаго тѣла есть геометрическая сумма ея скорости скольженія и ея вращательной скорости около мгновенной винтовой оси

и называя скорость скольженія въ относительномъ движеніи твердаго тѣла черезъ

$$v_{r,\sigma},$$

а вращательную скорость какой-нибудь его точки, при этомъ движеніи, черезъ

$$w_r$$

и скорость скольженія твердаго тѣла, при его переносномъ движеніи, черезъ

$$v_{e,\sigma},$$

а вращательную скорость какой-нибудь его точки, при этомъ движеніи, черезъ

$$w_e,$$

мы будемъ имѣть

$$\bar{v}_r = \bar{v}_{r,\sigma} + \bar{w}_r$$

и

$$v_e = \bar{v}_{e,\sigma} + \bar{w}_e$$

и, слѣдовательно, получимъ, что

$$\bar{v}_a = \bar{v}_{r,\sigma} + \bar{v}_{e,\sigma} + \bar{w}_r + \bar{w}_e .$$

Разсматривая правую часть этого равенства, мы видимъ, что всѣ векторы, входящіе въ ея составъ, перпендикулярны къ прямой AB, а слѣдовательно и

$$v_a \perp AB,$$

т. е. приходимъ къ заключенію, что абсолютныя скорости всѣхъ точекъ разсматриваемаго нами тѣла S, лежащихъ на прямой AB, перпендикулярны къ этой прямой, но такъ какъ и мгновенная винтовая ось абсолютнаго движенія тѣла S должна быть къ ней перпендикулярна потому, что

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_e,$$

а

$$\omega_r \perp AB$$

и

$$\omega_e \perp AB,$$

то мы можемъ на прямой AB найти такую точку тѣла S, абсолютная скорость которой будетъ параллельна угловой скорости

$$\omega_a$$

и черезъ эту точку и будетъ проходить, слѣдовательно, мгновенная винтовая ось абсолютнаго движенія.

Для того же, чтобы найти упомянутую точку, замѣтимъ, что въ ней проекція скорости

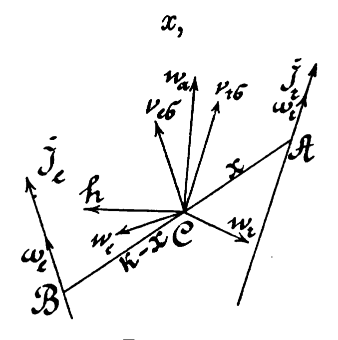
$$v_a$$

на направленіе h, перпендикулярное къ угловой скорости ω_a и къ прямой AB, должна быть равна нулю, т. е. что въ этой точкѣ мы будемъ имѣть

$$v_{r,\sigma} \, Cos\,(v_{r,\sigma}, h) + v_{e,\sigma} \, Cos\,(v_{e,\sigma}, h) + w_r \, Cos\,(w_r, h) + \\ + w_e \, Cos\,(w_e, h) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (117)$$

Положимъ, что искомая точка будетъ C (черт. 95), назовемъ ея разстояніе отъ точки A черезъ

$$x,$$



Черт. 95.

а разстояніе между точками A и B черезъ

$$k$$

и замѣтимъ, что, для этой точки,

$$w_r = M_C(\omega_r)_A = \omega_r x$$

и

$$w_e = M_C(\omega_e)_B = \omega_e(k - x)$$

Въ такомъ случаѣ, принимая во вниманіе, что

$$Cos(v_{r,\sigma}, h) = -Sin(\omega_r, \omega_a)$$
$$Cos(v_{e,\sigma}, h) = Sin(\omega_e, \omega_a)$$
$$Cos(w_r, h) = -Cos(\omega_r, \omega_a)$$
$$Cos(w_e, h) = Cos(\omega_e, \omega_a),$$

мы можемъ равенство (117) представить подъ видомъ

$$-v_{r,\sigma} Sin(\omega_r, \omega_a) + v_{e,\sigma} Sin(\omega_e, \omega_a) - \omega_r x Cos(\omega_r, \omega_a) + \\ + \omega_e(k - x) Cos(\omega_e, \omega_a) = 0,$$

откуда будемъ имѣть, что

$$x = \frac{\omega_e k Cos(\omega_e, \omega_a) - v_{r,\sigma} Sin(\omega_r, \omega_a) + v_{e,\sigma} Sin(\omega_e, \omega_a)}{\omega_r Cos(\omega_r, \omega_a) + \omega_e Cos(\omega_e, \omega_a)}$$

и такимъ образомъ найдемъ положеніе точки C, черезъ которую проходитъ мгновенная винтовая ось абсолютнаго движенія разсматриваемаго нами тѣла.

87. **Теорема**. *Угловое ускореніе абсолютнаго движенія твердаго тѣла есть геометрическая сумма угловыхъ ускореній его относительнаго и переноснаго движеній и добавочнаго углового ускоренія, равнаго площади параллелограма, построеннаго на угловыхъ скоростяхъ относительнаго и переноснаго движеній разсматриваемаго тѣла и направленнаго по перпендикуляру къ этой площади такъ, чтобы, ставъ по его направленію въ конць относительной угловой скорости, наблюдатель увидалъ переносную угловую скорость направленной слѣва направо.*

Имѣя въ виду, что величина и направленіе углового

ускоренія твердаго тѣла не зависитъ отъ выбора его полюса, мы можемъ, нисколько не нарушая общности разсматриваемой теоремы, предполагать оба полюса, какъ того тѣла S, относительное движеніе котораго мы разсматриваемъ, такъ и того тѣла S_1, по отношенію къ которому движется тѣло S, находящимися въ началѣ координатъ неподвижной координатной системы.

Называя угловыя скорости абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній тѣла S соотвѣтственно черезъ

$$\omega_a,\ \omega_r \text{ и } \omega_e,$$

мы будемъ имѣть, что, въ любой моментъ времени t,

$$\overline{\omega_a} = \overline{\omega_r} + \overline{\omega_e}$$

и, слѣдовательно, для безконечно малаго промежутка времени

$$\Delta t,$$

прилегающаго къ этому моменту, получимъ

$$\overline{\Delta\omega_a} = \overline{\Delta\omega_r} + \overline{\Delta\omega_e},$$

откуда найдемъ, что

$$\frac{\overline{\Delta\omega_a}}{\Delta t} = \frac{\overline{\Delta\omega_r}}{\Delta t} + \frac{\overline{\Delta\omega_e}}{\Delta t}$$

и, слѣдовательно, для момента времени t, будемъ имѣть

$$lim\,\frac{\overline{\Delta\omega_a}}{\Delta t} = lim\,\frac{\overline{\Delta\omega_r}}{\Delta t} + lim\,\frac{\overline{\Delta\omega_e}}{\Delta t}.$$

Разсматривая это равенство и обозначая угловыя ускоренія абсолютнаго, относительнаго и переноснаго движеній тѣла S соотвѣтственно черезъ

$$\tau_a,\ \tau_r,\ \tau_e,$$

мы видимъ, что

$$lim\,\frac{\overline{\Delta\omega_a}}{\Delta t} = \tau_a$$

и что

$$\lim \frac{\overline{\Delta\omega_e}}{\Delta t} = \tau_e ,$$

что же касается выраженія

$$\lim \frac{\overline{\Delta\omega_r}}{\Delta t},$$

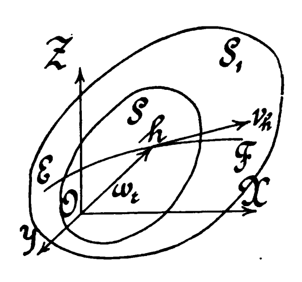
то относительно него нельзя сказать, что оно равняется

$$\tau_r ,$$

ибо векторъ

$$\overline{\Delta\omega_r}$$

является хордой годографа относительной угловой скорости не въ относительномъ движеніи тѣла S, а годографа этой скорости, построеннаго въ неподвижномъ пространствѣ. Принимая во вниманіе это замѣчаніе, построивъ упомянутый годографъ EF (черт. 96) при началѣ неподвижной



Черт. 96.

координатной системы и называя скорость его точки h, лежащей въ концѣ угловой скорости ω_r, въ разсматриваемый моментъ времени, черезъ

$$v_h ,$$

мы можемъ написать, что

$$\lim \frac{\overline{\Delta\omega_r}}{\Delta t} = v_h$$

Что касается точки h, то ея движеніе по годографу EF является ея абсолютнымъ движеніемъ и можетъ быть разсматриваемо, какъ составное изъ ея относительнаго движенія въ тѣлѣ S и переноснаго движенія вмѣстѣ съ этимъ тѣломъ, а потому, называя относительную скорость этой точки черезъ

$$v_{h,r},$$

а ея переносную скорость черезъ

$$v_{h,e},$$

мы будетъ имѣть, что

$$\overline{v_h} = \overline{v_{h,r}} + \overline{v_{h,e}},$$

при чемъ

$$\overline{v_{h,r}} = \overline{\tau_r},$$

а

$$\overline{v_{h,e}} = \overline{M_h(\omega_e)},$$

ибо это есть скорость нѣкоторой точки въ переносномъ движеніи тѣла S около неподвижной точки O. На основаніи вышеизложеннаго, мы будемъ имѣть, что

$$\overline{\tau_a} = \overline{\tau_r} + \overline{\tau_e} + \overline{\tau_c},$$

гдѣ

$$\tau_c = M_h(\omega_e)$$

и, слѣдовательно, наша теорема доказана.

Принимая во вниманіе, что

$$\tau_c = M_h(\omega_e) = \omega_e \ \omega_r \ Sin(\omega_e, \omega_r),$$

мы видимъ, что

$$\tau_c = 0$$

во-первыхъ, когда

$$\omega_e = 0,$$

во-вторыхъ, когда

$$\omega_r = 0$$

и, наконецъ, когда

$$\omega_e \parallel \omega_r;$$

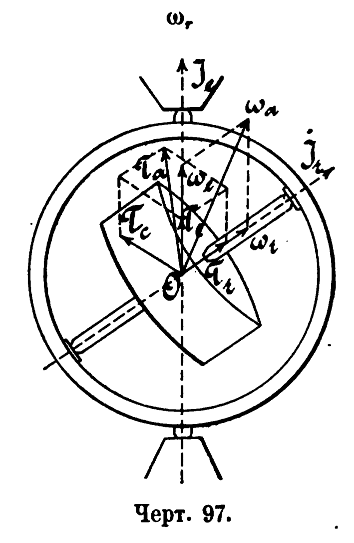
во всѣхъ этихъ случаяхъ

$$\overline{\tau_a} = \overline{\tau_r} + \overline{\tau_c}.$$

Такимъ образомъ, угловое ускореніе абсолютнаго движенія твердаго тѣла есть геометрическая сумма угловыхъ ускореній его относительнаго и переноснаго движеній, когда его относительная угловая скорость равна нулю или когда его переносная угловая скорость равна нулю или же когда эти угловыя скорости взаимно параллельны.

Примѣръ 33. Опредѣлить угловую скорость и угловое ускореніе тора (черт. 97), вращающагося съ угловой скоростью

$$\omega_r$$



Черт. 97.

около его оси, установленной въ кольцѣ, вращающемся, въ свою очередь, съ угловой скоростью

$$\omega_e$$

около оси, пересѣкающейся съ осью тора въ его центрѣ.

Угловая скорость абсолютнаго движенія тора опредѣлится равенствомъ

$$\overline{\omega_a} = \overline{\omega_r} + \overline{\omega_e}$$

и, слѣдовательно, мы будемъ имѣть, что

$$\omega_a = \sqrt{\omega_r^2 + \omega_e^2 + 2\omega_r\ \omega_e\ Cos\,(\omega_r\,,\ \omega_e)}$$

Мгновенная винтовая ось абсолютнаго движенія тора будетъ направлена по діагонали параллелограма, построеннаго на угловыхъ скоростяхъ

$$\omega_r \text{ и } \omega_e\,.$$

Угловое ускореніе абсолютнаго движенія тора опредѣлится равенствомъ

$$\overline{\tau_a} = \overline{\tau_r} + \overline{\tau_e} + \overline{\tau_c}\,,$$

при чемъ

$$\tau_r = \omega_r'$$

и направлено по оси тора,

$$\tau_e = \omega'_e$$

и направлено по оси кольца и

$$\tau_c = \omega_r\ \omega_e\ Sin\,(\omega_r\,,\ \omega_e).$$

и направлено по перпендикуляру къ плоскости осей кольца и тора. Слѣдовательно,

$$\tau_a = \sqrt{\omega_r'^2 + \omega_e'^2 + \omega_r^2\,\omega_e^2\ Sin^2\,(\omega_r,\ \omega_e) + 2\omega_r'\ \omega_e'\ Cos\,(\omega_r, \omega_e)}$$

Въ случаѣ, если вращеніе тора и вращеніе кольца оба равномѣрны, то

$$\omega_r' = \omega_e' = 0$$

и угловое ускореніе абсолютнаго вращенія тора будетъ

$$\tau_a = \omega_r\ \omega_e\ Sin\,(\omega_r\,,\ \omega_e).$$

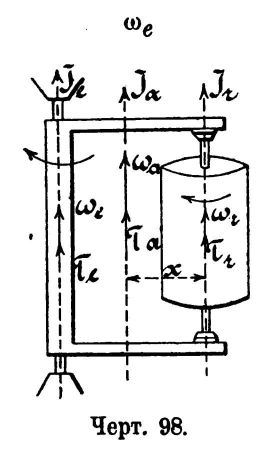
Примѣръ 34. Опредѣлить угловую скорость и угловое ускореніе абсолютнаго движенія прямого кругового ци-

линдра S (черт. 98), вращающагося около его оси съ угловой скоростью

$$\omega_r ,$$

при условіи, что эта ось установлена въ рамѣ, которая сама вращается съ угловой скоростью

$$\omega_e$$



Черт. 98.

около оси, параллельной оси цилиндра и лежащей отъ нея на разстояніи

$$d.$$

Угловая скорость абсолютнаго вращенія будетъ

$$\omega_a = \omega_r + \omega_e ;$$

мгновенная винтовая ось будетъ параллельна оси цилиндра и будетъ лежать въ плоскости осей рамы и цилиндра на разстояніи

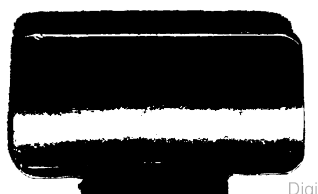
$$x = \frac{d\omega_e}{\omega_r + \omega_e}$$

отъ послѣдней.

Угловое ускореніе абсолютнаго вращенія цилиндра будетъ

$$\tau_a = \tau_r + \tau_e = \omega_r' + \omega_e'.$$





Другія сочиненія того же автора.

Опытъ элементарной теоріи Вейерштрассовыхъ функцій $\wp u$, ζu и σu съ приложеніемъ статьи объ эллиптическихъ функціяхъ $\mathrm{sn}u$, $\mathrm{cn}u$ и $\mathrm{dn}u$. 1898 г. Ц 2. р.

О поверхности, испытывающей наименьшее сопротивленіе, при движеніи въ сопротивляющейся средѣ 1904 г. Ц. 1 р. 50 к.

Складъ изданій: Типографія Министерства Путей Сообщенія (Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°). С.-Петербургъ, Фонтанка, 117.